现代应用数学丛书

富里哀变换与拉普拉斯变换

〔日〕河田龙夫 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

富里哀变换与拉普拉斯变换

〔日〕河田龙夫 著
錢 端 壮 譯
林 坚 冰 等 校

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯
全书共分八章，前四章介紹 Fourier 变换以及与其有关的
eltjes 积分、Mellin 变换和 Hankel 变换等，第五章介紹
place 变换，最后三章介紹这些变换的主要应用、表現問題、
分函数和其他各种变换。适合于各高等学校数理系作为数学
考书，并可供工程技术人員、科学研究工作者参考。

現代应用数学丛书

富里哀变换与拉普拉斯变换

原书名 Fourier 变换と Laplace 变换
原著者 〔日〕河田龙夫
原出版者 岩波书店
譯者 錢端壮
校者 林坚冰等

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
上海市印刷五厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 6 10/32 字数 149,000
1961年11月第1版 1961年11月第1次印刷
印数 1—16,000

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目 录

第1章　Fourier 变换

§1　記　号

区間 $a<x<b$ 記作(a, b)，$a\leqslant x\leqslant b$ 記作$[a, b]$。同样把 $a<x\leqslant b$，$a\leqslant x<b$ 分别記作$(a, b]$，$[a, b)$。$-\infty<x<+\infty$ 記作$(-\infty, +\infty)$。滿足下列条件

$$\int_a^b |f(x)|^p dx<\infty$$

的所有函数 $f(x)$ 的全体記作 $L_p(a, b)$。$f(x)$ 是具有复数值的函数。

在沒有特别指出所考虑的区間的必要，以及沒有誤解的顧虑时，也簡单地用 L_p 来表示。

如果 $f(x)$ 是(a, ∞)中任意的有限区間內属于 L_1 的函数，并且极限値

$$\lim_{X\to\infty}\int_a^X f(x)dx$$

存在的时候，就把极限値記作

$$\int_a^{\to\infty} f(x)dx.$$

$\int_{\to-\infty}^{\to+\infty} f(x)dx$ 的意义就是 $\lim\limits_{\substack{X\to+\infty\\ X'\to-\infty}}\int_{X'}^X f(x)dx$。同样地$\int_{\to a}^b f(x)dx$ 的意义就是 $\lim\limits_{A\to a}\int_A^b f(x)dx$。

§2　Fourier 变换的定义

設 $f(x)\in L_1(-\infty, +\infty)$，就是説

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<\infty.$$

这时

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}f(x)dx \tag{2.1}$$

叫做$f(x)$的 **Fourier 变换**。

定理 2.1 $F(t)$ 在区間$-\infty<t<+\infty$内有界，并且一致連續。

証明 由于$|F(t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$，所以很明显它是有界的。現在对任意的$\varepsilon>0$，取这样的$A$，使得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|X|>A}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

当$|t_1-t_2|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx\right)<\frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}A}$❶时，由于

$$|F(t_1)-F(t_2)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>A}|e^{it_1x}-e^{it_2x}|\cdot|f(x)|dx$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{+A}|e^{i(t_1-t_2)x}-1|\,|f(x)|dx,$$

又由于$|e^{i(t_1-t_2)x}-1|\leqslant|t_1-t_2|\,|x|$，所以

$$\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{|x|>A}|f(x)|dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A\cdot|t_1-t_2|\int_{-A}^{+A}|f(x)|dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A\cdot|t_1-t_2|\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

如果$f(x)\in L_1(0,\infty)$的时候，就分别地把

$$F(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos xt\,dt, \tag{2.2}$$

---

❶ 原文誤为$|t_1-t_2|<\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}A}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$。——譯者注

$$G(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin xt\,dt \tag{2.3}$$

叫做$f(x)$的余弦变换以及$f(x)$的正弦变换。它們也是有界，并且一致連續的。

此外，如果$f(x)\in L_1(-\infty,+\infty)$，并且是偶函数，那么

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}f(x)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-ixt}f(x)dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-ixt}f(x)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-ixt}f(x)dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{ixt}f(x)dx\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos xt\,f(x)dx.\end{aligned}$$

这就是說，它的 Fourier 变换和它的余弦变换相等。同样，如果$f(x)\in L_1(-\infty,+\infty)$，而且是奇函数，那么，$f(x)$的 Fourier 变换等于区間$(0,\infty)$中的正弦变换。

定理 2.2 (Riemann-Lebesgue) (i) 如果$f(x)\in L_1(-\infty,+\infty)$，則

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ixt}dx=0. \tag{2.4}$$

(ii) 一般，如果$f(x)\in L_1(-\infty,+\infty)$，$K(x)$为有界函数，并且当$(A\to\infty,B\to\infty)$时，有

$$\int_0^A K(x)dx=o(A),\quad \int_{-B}^0 K(x)dx=o(B),$$

則

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)K(tx)dx=0. \tag{2.5}$$

証明 現在証明(ii)。事实上，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)K(tx)dx=\int_0^\infty f(x)K(tx)dx+\int_{-\infty}^0 f(x)K(tx)dx,$$

所以只需証明右边各项当 $t\to\infty$ 时的极限值为零，就是証明

$$\int_0^\infty f(x)K(tx)dx\to 0 \quad (|t|\to\infty) \tag{2.6}$$

卽可。現在先假設 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 中等于定数 c，而对其他的 x 則等于零，这样，就有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)K(tx)dx &= c\int_\alpha^\beta K(tx)dx = \frac{c}{t}\int_{\alpha t}^{\beta t} K(u)du \\ &= \frac{c}{t}\int_0^{\beta t} K(u)du - \frac{c}{t}\int_0^{\alpha t} K(u)du \\ &= o(1) \quad (|t|\to\infty). \quad (\text{根据假設。})\end{aligned}$$

其次，設 $f_i(x)$ 在 $[\alpha_i, \beta_i]$ 的各区間中分别等于定数 c_i，而对其他的 x 等于零。这里 $[\alpha_i, \beta_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是都在区間 $(0, \infty)$ 中但沒有公共点的区間。这样，公式(2.6)对于 $\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)$ 也是成立的。对于一般的 $f(x)\in L_1(0, \infty)$，取形如 $\sum c_i f_i(x)$ 的函数 $g(x)$，使得

$$\int_0^\infty |f(x)-g(x)|dx<\varepsilon,$$

ε 是任意給定的正数。所以有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty f(x)K(tx)dx\right| &\leqslant \left|\int_0^\infty \{f(x)-g(x)\}K(tx)dx\right| \\ &\quad + \left|\int_0^\infty K(tx)g(x)dx\right| \\ &= I_1+I_2.\end{aligned}$$

因为 $K(x)$ 有界，所以有定数 M，使得 $|K(x)|\leqslant M$，而有

$$|I_1|\leqslant M\int_0^\infty |f(x)-g(x)|dx<\varepsilon M.$$

另外，由于上面証实的理由，有

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty g(x)K(tx)dx=0.$$

所以如果 T 是相当大的数，当 $|t|>T$ 时，就能使 $|I_2|<\varepsilon$.

因此

$$\left|\int_0^{\infty} f(x)K(tx)dx\right| < \varepsilon M+\varepsilon=(M+1)\varepsilon,$$

而(ii)証毕，(i)就是(ii)当 $K(x)=e^{itx}$ 时的特殊情况。 証毕

注意 当 a, b 是有限的数，$f(x)\in L_1(a, b)$ 时，有

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_a^b f(x)e^{-ixt}dx=0.$$

这是定理 2.2 的特殊情况。因为可以令 $f(x)=0$ $(-\infty<x<a, b<x<\infty)$，而把 $f(x)$ 当作定义在 $(-\infty, \infty)$ 内，于是 $f\in L_1(-\infty, \infty)$.

定理 2.3 設对于任意的有限区間 (a, b)，$f(x)$ 属于 $L_1(a, b)$，并且在 $x>A$，$x<-B$ 内，$f(x)$ 分别单調地趋于零 $(|x|\to\infty)$；于是，若 $t\neq 0$，則积分

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)e^{-itx}dx$$

存在。

証明 現在証明 $\int_0^{\to\infty} f(x)e^{-itx}dx$ 存在。我們先証明下面这个事实，卽对于已給的 ε，如果 A 相当大的話，对于任意的满足不等式 $X'>X\geqslant A$ 的 X' 与 X，

$$\left|\int_X^{X'} f(x)\sin tx\,dx\right|<\varepsilon. \tag{2.7}$$

因为 $f(x)$ 当 $x\geqslant A$ 时单調减少，所以可設

$$0<|f(x)|<\frac{\varepsilon t}{2}.$$

根据积分学的第二中値定理，有

$$\int_X^{X'} f(x)\sin tx\,dx=f(X)\int_X^{\xi}\sin tx\,dx$$

$$=f(X)\frac{\cos tX-\cos t\xi}{t}.$$

所以

$$\left|\int_X^{X'} f(x)\sin tx\,dx\right|\leqslant\frac{2|f(X)|}{t}<\varepsilon,$$

这样就証明了

$$\int_0^{\to\infty} f(x)\ \sin tx\, dx$$

是存在的。同样地能够証明

$$\int_0^{\to\infty} f(x)\ \cos tx\, dx$$

是存在的。于是

$$\int_0^{\to\infty} f(x)e^{-itx}dx \quad (t\neq 0)$$

是存在的。完全同样能够証明

$$\int_{\to-\infty} f(x)e^{-itx}\, dx$$

也是存在的。 証毕

注意 用完全同样的証法,能夠得到下列的事实。設

$$f(x)=g(x)\sin(px+q),\qquad p, q \text{ 均为常数},$$

$g(x)$ 当 $x\to\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时单調地收斂于零。对于这样的 $f(x)$,

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)e^{itx}dx \quad (t\neq p)$$

存在。

定理 2.4 設 $f(x)\in L_1$, $g(x)\in L_1$, 并設它們的 Fourier 变换分别是 $F(t)$ 与 $G(t)$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(x)dx. \tag{2.8}$$

这个等式称为 **Parseval 等式**。

証明

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-ixu}\,du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixu}dx=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(u)du.$$

証毕

由公式(2,8)能够得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(-x)e^{-iyx}dx=\int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(y-x)dx. \qquad (2.9)$$

事实上,对于固定的 y, 代替 $g(x)$ 考虑 $g(y-x)$, 则由

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y-x)e^{-itx}dx=e^{-iyt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{iut}du$$
$$=e^{-iyt}G(-t),$$

就能得到(2.9)式。

§3 几个定积分

1. 由于定理 2.3, 积分

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin tx}{x}\,dx \qquad (3.1)$$

存在。[因为如果令

$$f(x)=0 \quad (x<\varepsilon), \quad f(x)=\frac{1}{x} \quad (x>\varepsilon),$$

则由定理 2.3 中积分的虚数部分,知道积分

$$\int_{\varepsilon}^{\to\infty} \frac{\sin tx}{x}\,dx$$

是存在的($t\neq 0$)。另外,积分

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin tx}{x}\,dx$$

存在,所以(3.1)存在。如 $t=0$, 则(3.1)明显地等于零]。

我們現在試求(3.1)的值。为了这个目的,設 $k>0$, 则

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}\cos tx\,dx=\frac{k}{k^2+t^2}.$$

对变数 t 由 0 到 u 积分,就有

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}dx\int_0^{u}\cos tx\,dt=\tan^{-1}\frac{t}{k}, \quad k>0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}\frac{\sin ux}{x}\,dx=\tan^{-1}\frac{t}{k}.$$

此外，

$$\left|\int_A^\infty \frac{e^{-kx}}{x}\sin ux\,dx\right| = \lim_{B\to\infty}\left|\int_A^B \frac{e^{-kx}}{x}\sin ux\,dx\right|$$

$$= \lim_{B\to\infty}\left|\frac{e^{-kA}}{A}\int_A^\xi \sin ux\,dx\right| \quad \text{（积分第二中值定理）}$$

$$= \lim_{B\to\infty}\left|\frac{e^{-kA}}{A}\frac{\cos u\xi - \cos uA}{u}\right| \leqslant \frac{2}{u}\frac{e^{-kA}}{A} \leqslant \frac{2}{Au}.$$

所以积分

$$\int_0^{\to\infty} \frac{e^{-kx}}{x}\sin ux\,dx$$

对于 k 一致收敛（$0\leqslant k<\infty$，u 固定）。因此，当 $u>0$ 时，有

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin ux}{x}\,dx = \lim_{k\to 0}\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin ux}{x}dx = \lim_{k\to 0}\tan^{-1}\frac{u}{k} = \frac{\pi}{2}.$$

就是説

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin ux}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{3.2}$$

因为被积函数是偶函数，所以

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} \frac{\sin ux}{x}\,dx = \pi \quad (u>0). \tag{3.3}$$

同样有

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} \frac{\sin ux}{x}\,dx = -\pi \quad (u<0).$$

因此

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} \frac{\sin ux}{x}dx = \begin{cases} \pi, & u>0; \\ 0, & u=0; \\ -\pi, & u<0. \end{cases} \tag{3.4}$$

2. 同样，当 $t>0$，$0<\mu<1$ 时，有

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-itx}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{t^\mu}e^{-i\mu\frac{\pi}{2}}. \tag{3.5}$$

这里 $\Gamma(\mu)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\mu-1}dx$. 上面的公式显然是由于在

$$\int_0^\infty e^{-kx}x^{\mu-1}e^{-itx}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{(k+it)^\mu} \tag{3.6}$$

中取 $k\to 0$ 而得到的。[(3.6) 自身，当 $k>0$, $0<\mu<\infty$, $-\infty<t<\infty$ 时成立]。

特别有下面的結果:

$$\int_0^{\to\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{\to\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{3.7}$$

下面我們討論一下当 $x\to\infty$ 时,积分

$$J_1=\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}\cos\left(xt-\frac{n\pi}{2}\right)dt$$

的样子。

令 $1-t=u$, 則

$$J_1=\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\cos\left(ux-x+\frac{n\pi}{2}\right)du=\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\cos ux\,du$$
$$+\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\sin ux\,du.$$

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\cos ux\,du=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x v^{-\frac{1}{2}}\cos v\,dv$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\to\infty}v^{-\frac{1}{2}}\cos v\,dv-\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{\to\infty}v^{-\frac{1}{2}}\cos v\,dv,$$

$$\int_x^A v^{-\frac{1}{2}}\cos v\,dv=x^{-\frac{1}{2}}\int_x^\xi\cos v\,dv \quad \text{(第二中値定理)}$$
$$=x^{-\frac{1}{2}}(\sin\xi-\cos x)=O(x^{-\frac{1}{2}}),$$

因此有

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\cos ux\,du=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\to\infty}v^{-\frac{1}{2}}\cos v\,dv+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

由(3.7)式,

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

同样有

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \sin ux\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

因此

$$J_1 = \left\{ \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\right\} \left\{\sqrt{\frac{\pi}{2x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3.8}$$

下面再研究一下积分

$$J_2 = \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right) dt.$$

把 J_2 写成

$$J_2 = \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right) dt$$

$$+ \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} \{(1+t)^{-\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}}\} \cos\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right) dt$$

$$= J_{21} + J_{22}.$$

令 $(1-t)^{-\frac{1}{2}} \{(1+t)^{-\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}}\} = \varphi(t)$，则

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{2}\sqrt{1+t}\,(\sqrt{2} + \sqrt{1+t})},$$

并且立刻晓得

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{1}{2+\sqrt{2}}, \quad \int_0^1 |\varphi'(t)|\, dt < \infty.$$

于是由分部积分法，有

$$J_{22} = \left[\varphi(t) \frac{\sin\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right)}{x}\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 \varphi'(t) \sin\left(xt - \frac{nx}{2}\right) dt$$

$$= O\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x}\int_0^1 |\varphi'(t)|\, dt\right) = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

对于 J_{21}，利用(3.8)，有

$$J_2=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3.9}$$

现在如果令

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\cos xt\,dt,$$

则

$$J_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3.10}$$

3. 现在研究一下 e^{-x^2} 的 Fourier 变换。

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{3.11}$$

是大家熟知的公式。由这个公式就有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},\qquad \lambda>0. \tag{3.12}$$

設 z 是复变数，而来考虑 e^{-z^2}，它是到处正则的函数。如果沿着图 3.1 中的 $ABCDA$ 把 e^{-z^2} 积分，则积分的結果等于零。由于 A, B, C, D 各点分别是 $-T$, T, $T+it$, $-T+it$，所以

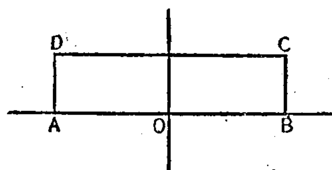


图 3.1

$$\int_{-T}^{T}e^{-z^2}dz+\int_{T}^{T+it}e^{-z^2}dz+\int_{T+it}^{-T+it}e^{-z^2}dz+\int_{-T+it}^{-T}e^{-z^2}dz=0. \tag{3.13}$$

把 t 固定住，则

$$\left|\int_T^{T+it}e^{-z^2}dz\right|=\left|\int_0^t e^{-(T+iu)^2}du\right|\leqslant e^{-T^2}\int_0^t e^{u^2}du\to 0\quad(T\to\infty).$$

同样有

$$\int_{-T+it}^{-T}e^{-z^2}dz\to 0.$$

因此当 $T\to\infty$ 时，根据(3.13)，有

$$\int_{-\infty+it}^{\infty+it} e^{-z^2}dz=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

由于方程的右边是

$$2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

的关系，整个的式子就化成

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2itx}dx=\sqrt{\pi}\,e^{-t^2}.$$

把公式中的 $2t$ 写成 t，就得到

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-itx}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-t^2/4}, \tag{3.14}$$

由此能得到

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}e^{-itx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}e^{-t^2/4\lambda}. \tag{3.15}$$

§4 Fourier 积分定理

定理 4.1 設 $f(u)$ 在 $u=x$ 的近傍是有界变分函数，并且在任意有限区間可积。另外还满足下面两个条件中的一个：

1° $f(u)/u\in L_1(A, \infty)$，并且 $\in L_1(-\infty, -A)$，$A>0$。

2° $f(u)/u$ 当 $u\to+\infty$ 及 $u\to-\infty$ 时，单調收斂于零。

則

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]. \tag{4.1}$$

如果 2° 满足的时候，$\int_{-\infty}^{\infty}$ 意味着 $\int_{\to-\infty}^{\to\infty}$. 这个公式叫做 **Fourier 单积分定理**。

积分

$$D(x, \lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi$$

叫做 **Dirichlet 积分**。

証明 假設满足的是条件 1°。考虑

$$D(x,\lambda)=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\infty}+\int_{-\infty}^{0}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\{f(x+\xi)+f(x-\xi)\}\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi.$$

根据(3.2)有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\to\infty}\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi=1, \tag{4.2}$$

令 $\varphi(\xi)=f(x+\xi)+f(x-\xi)$，則

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))=\frac{1}{\pi}\int_0^{\to\infty}\varphi(+0)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi.$$

假定 $\delta>0$，則

$$\int_\delta^{\to\infty}\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi=\int_{\lambda\delta}^{\to\infty}\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta\to 0\quad(\lambda\to\infty). \tag{4.3}$$

現在如果固定 x，由于

$$\frac{f(x+\xi)}{\xi},\qquad\frac{f(x-\xi)}{\xi}$$

都属于 $L_1(\delta,\infty)$，所以 $\varphi(\xi)/\xi\in L_1(\delta,\infty)$，于是根据定理 2.1，有

$$\int_\delta^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\xi}\sin\lambda\xi\,d\xi\to 0\quad(\lambda\to\infty). \tag{4.4}$$

再令

$$\begin{aligned}
&D(x,\lambda)-\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\to\infty}\varphi(+0)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\{\varphi(\xi)-\varphi(+0)\}\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi+\frac{1}{\pi}\int_\delta^{\infty}\varphi(\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi\\
&\quad-\frac{1}{\pi}\int_\delta^{\to\infty}\varphi(+0)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\{\varphi(\xi)-\varphi(+0)\}\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi+\eta(\lambda,\delta).
\end{aligned}$$

因为 $\varphi(\xi)-\varphi(+0)$ 在 $\xi=0$ 的近傍是有界变分函数，所以可以假

設它是单調增加的。并且可假定 $\varphi(\xi)-\varphi(+0)\to 0(\xi\to 0)$。現在对任意給定的 ε，取相当小的 δ，使得

$$|\varphi(\xi)-\varphi(+0)|<\varepsilon, \quad 0\leqslant\xi\leqslant\delta.$$

对于这样的 δ，当 λ_0 相当大时，能够使

$$|\eta(\lambda, \delta)|<\varepsilon, \quad \lambda\geqslant\lambda_0. \tag{4.5}$$

証明見(4.4)。

另外，

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \{\varphi(\xi)-\varphi(+0)\}\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi\right|$$
$$=\left|\frac{1}{\pi}\{\varphi(\delta)-\varphi(+0)\}\int_b^\delta\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi\right|$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}\left|\int_{b\lambda}^{\delta\lambda}\frac{\sin v}{v}dv\right|.$$

但是因为

$$\left|\int_\alpha^1\frac{\sin v}{v}dv\right|<\int_\alpha^1 dv<1 \quad (\alpha<1),$$

$$\left|\int_1^\beta\frac{\sin v}{v}dv\right|=\left|\int_1^\gamma\sin v\,dv\right| \quad (\text{第二中值定理})$$
$$=|\cos\gamma-\cos 1|\leqslant 2 \quad (\beta>1),$$

所以

$$\left|\int_A^B\frac{\sin v}{v}dv\right|<C, \tag{4.6}$$

C 是与 A, B 无关的常数。于是

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \{\varphi(\xi)-\varphi(+0)\}\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi\right|\leqslant\frac{C\varepsilon}{\pi}.$$

由这个公式及(4.5)就証明了(4.1)。

如果满足的是条件 2°，証明的方法完全一样，仅是(4.4)式的成立可以用不同的方法导出。設 A 相当大，$B>A$；因为 $f(u)/u$ 在(A, B)中单調减少，根据积分第二中值定理，有 C 满足 $A<C<B$，并且

$$\int_A^B \frac{f(x+\xi)}{\xi}\sin\lambda\xi\,d\xi=\int_A^B\frac{f(x+\xi)}{x+\xi}\cdot\frac{x+\xi}{\xi}\sin\lambda\xi\,d\xi$$

$$=\frac{f(x+A)}{x+A}\int_A^C\frac{x+\xi}{\xi}\sin\lambda\xi\,d\xi$$

$$=\frac{f(x+A)}{x+A}x\int_A^C\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi+\frac{f(x+A)}{x+A}\int_A^C\sin\lambda\xi\,d\xi$$

$$=\frac{f(x+A)}{x+A}x\int_{A\lambda}^{C\lambda}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi+\frac{f(x+A)}{x+A}\left(\frac{\cos C}{\lambda}-\frac{\cos A}{\lambda}\right). \quad (4.7)$$

等号的右边当 $A, B\to\infty$ 时收斂于零，所以

$$\int_A^{\to+\infty}\frac{f(x+\xi)}{\xi}\sin\lambda\xi\,d\xi$$

存在，并且由于(4.7)，

$$\lim_{A\to\infty}\int_A^{\to\infty}\frac{f(x+\xi)}{\xi}\sin\lambda\xi\,d\xi=0.$$

同样有

$$\lim_{A\to\infty}\int_A^{\to\infty}f(x-\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi=0.$$

又由定理 2.1 得到

$$\int_\delta^A\varphi(\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}d\xi\to 0\quad(\lambda\to\infty).$$

从而証明了(4.4)。 証毕

由定理(4.1)直接可以导出下面的定理。

定理 4.2 若 $f(u)\in L_1(-\infty,\infty)$，并且在 $u=x$ 的近傍是有界变分函数，则

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\to\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos t(u-x)\,du. \quad (4.8)$$

这叫做 **Fourier 重积分定理。**

証明 $\frac{1}{\pi}\int_0^A dt\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos t(u-x)\,du$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,du\int_0^A\cos t(u-x)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{\sin A(u-x)}{u-x}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi)\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi.$$

当 $A\to\infty$ 时，根据定理 4.1，方程的右边收斂于

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

証毕

§5　反演公式，唯一性

設 $f(x)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)$，那么把 $f(x)$ 用 $F(t)$ 表达的公式叫做**反演公式**。

定理 5.1　設 $f(u)\in L_1(-\infty,\infty)$，并且在 $u=x$ 的近傍是有界变分函数，又設 $f(u)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)$，則

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} e^{ixt}F(t)dt. \quad (5.1)$$

証明　根据前一节中定理 4.2，有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} e^{ixt}F(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} e^{ixt}dt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iut}du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du\int_{-T}^{T} e^{i(x-u)t}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{e^{i(x-u)T}-e^{-i(x-u)T}}{2i(x-u)}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{\sin T(x-u)}{x-u}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi)\frac{\sin T\xi}{\xi}d\xi.$$

于是根据定理 4.1，1°[因为 $f(u)\in L_1(-\infty,\infty)$，所以当然满足 1°]，就証明了我們的定理。　　証毕

当 $F(t)\in L_1$ 的时候，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{ixt}dt$$

叫做 $F(t)$ 的逆 **Fourier** 变换。

如果 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，并且在任意的有限区間內是有界变分函数，那么几乎对所有的 x 有

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}F(t)e^{ixt}dt.$$

因此由 $F(t)$ 决定唯一的 $f(x)$（除了一个测度为零的 x 的集合）。这个事实即使不假設 $f(x)$ 的有界变分性也能成立。

定理 5.2 如果 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，并且它的 Fourier 变换 $F(t)=0\ (-\infty<t<\infty)$，則 $f(x)$ 几乎对于所有的 x 都等于零。

証明 象下面这样定义 $g_{a\varepsilon}$：

$$g_{a\varepsilon}(x)=\begin{cases}1, & -a\leqslant x\leqslant a,\\ 0, & x>a+\varepsilon,\ x<-a-\varepsilon,\\ \dfrac{a-x+\varepsilon}{\varepsilon}, & a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon,\\ \dfrac{x+a+\varepsilon}{\varepsilon}, & -a-\varepsilon\leqslant x\leqslant -a.\end{cases}$$

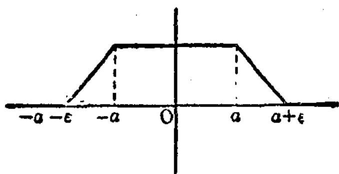


图 5.1

設 $g_{a\varepsilon}(x)$ 的 Fourier 变换是 $G_{a\varepsilon}(t)$。因为 $g_{a\varepsilon}(x)$ 是偶函数，所以

$$\begin{aligned}G_{a\varepsilon}(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g_{a\varepsilon}(x)e^{-ixt}dx\\ &=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}g_{a\varepsilon}(x)\cos xt\,dx\\ &=-\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}g'_{a\varepsilon}(x)\sin xt\,dx\\ &=\frac{1}{t\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^{a+\varepsilon}\sin xt\,dx\\ &=\frac{1}{t^2\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\cos at-\cos(a+\varepsilon)t)\\ &=O\left(\frac{1}{t^2}\right),\quad t\to\infty,\end{aligned}\tag{5.2}$$

因此 $G_{a\varepsilon}(t)$ 是有界的。

又因为 $g_{a\varepsilon}(x)$ 是有界变分函数，所以根据定理 5.1，有

$$g_{a\varepsilon}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}G_{a\varepsilon}(t)dt. \tag{5.3}$$

定理 5.1 中的积分 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 具有 $\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}$ 的意义。但是由于 (5.2)，$G_{a\varepsilon}(t)\in L_1(-\infty,\infty)$，所以可把这个积分考虑为 Lebesgue 积分。现在 $g_{a\varepsilon}(x)$ 是連續函数，所以 (5.3) 式的左边就是 $g_{a\varepsilon}(x)$，因而有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g_{a\varepsilon}(x-u)du\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)du\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i(x-u)t}G_{a\varepsilon}(t)dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}G_{a\varepsilon}(t)e^{ixt}dt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-iut}du\\&=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)G_{a\varepsilon}(t)e^{ixt}dt.\end{aligned} \tag{5.4}$$

[因为 $G_{a\varepsilon}(t)\in L_1(-\infty,\infty)$，$f(u)\in L_1(-\infty,\infty)$，所以积分的顺序允許交换。] 于是由于 $F(t)=0$，由 (5.4) 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g_{a\varepsilon}(x-u)du=0.$$

令 $\varepsilon\to 0$，則有

$$\int_{x-a}^{x+a}f(u)du=0.$$

因为 a 是任意的数，所以对于任意的 α 与 β，有

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du=0,$$

就是說对于几乎所有的 x，$f(x)=0$❶.　　　　証毕

---

❶ 其实下面的事实也成立：如对所有的 x 有

$$\lim_{X\to\infty}\int_{-X}^{X}f(x)e^{-ixt}dx=0,$$

則对于几乎所有的 x，$f(x)=0$. 見 A. C. Offord: Note on the uniqueness of representation of a function by a trigonometrical integral. Journ. London Math. Soc., 11 (1936).

§6 結合函数[1]

設 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 都是属于 $L_1(-\infty, \infty)$ 的函数，令 $g(x, y) = f_1(y)f_2(x-y)$，則

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} dy |f_1(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x-y)| dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(y)| dy \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)| dx.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)| dy < \infty. \qquad (6.1)$$

令

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y) dy,$$

則由(6.1)就知道

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty.$$

这个 $h(x)$ 叫做 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的結合函数，我們用記号

$$f_1 * f_2 = f_1 * f_2(x)$$

表示它。

在 $h(x)$ 的积分式中，令 $x-y=z$，則 $h(x)$ 就成为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-z) f_2(z) dz.$$

由此可知

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1. \qquad (6.2)$$

此外，对于三个都属于 $L_1(-\infty, \infty)$ 的函数 f_1, f_2, f_3，不难証明

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3). \qquad (6.3)$$

其次，如果 f_1 与 f_2 的 Fourier 变換分别是 $F_1(t)$ 与 $F_2(t)$，則

---

[1] 也称为卷积。——譯者注

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}dx\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(x-y)dy$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)dy\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}f_2(x-y)dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)e^{-ity}dy\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x-y)}f_2(x-y)dx$$
$$=\sqrt{2\pi}\,F_1(t)\cdot F_2(t).$$

这样就得到了下面的定理。

定理 6.1 如果 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 都属于 $L_1(-\infty,\infty)$，則 f_1*f_2 的 Fourier 变换等于 $\sqrt{2\pi}\,F_1(t)\cdot F_2(t)$.

例 1 設 $f_2(x)=\begin{cases} e^x, & -\infty<x<0,\\ 0, & 0<x,\end{cases}$

則

$$f(x)=f_1*f_2(x)=e^x\int_x^{\infty} e^{-y}f_1(y)dy.$$

例 2 如果 $f(x)=O(1)$，則积分

$$L(x)=\int_0^{\infty} e^{-xy}f(y)dy$$

当 $x>0$ 时絕对收斂。$L(x)$ 叫做 $f(x)$ 的 **Laplace 变换**。如果用 e^x 代替 x，并把积分中的 y 置换成为 e^{-y}，則有

$$L(e^x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{x-y}}f(e^{-y})e^{-y}dy,$$
$$L(e^x)e^x=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{x-y}}f(e^{-y})e^{x-y}dy.$$

如果令 $L(e^x)e^x=h(x)$, $g_1(x)=e^{-e^x}e^x$, $g_2(x)=f(e^{-x})$，上面的公式就变成

$$h(x)=g_1*g_2(x). \tag{6.4}$$

例 3 設 $\Phi(x)/(1+|x|)\in L_1(0,\infty)$, $x>0$，令

$$F(x)=\int_0^{\infty}\frac{\Phi(y)}{x+y}dy. \tag{6.5}$$

$F(x)$ 叫做 $\Phi(x)$ 的 **Stieltjes 变换**。

現在令 $\Phi_1(z)=\int_0^{\infty} e^{-yz}\Phi(y)dy$, $z>0$. 由于

$$\int_A^{\infty} e^{-yz}|\Phi(y)|dy=\int_A^{\infty} ye^{-yz}|\Phi(y)|/y\,dy,$$

而 $ye^{-yz}\leqslant\frac{1}{z}e^{-1}$，所以当 $z>0$ 取固定値后，积分值是有限的，即 $\Phi_1(z)$ 存在。于是有下列公式

$$\int_0^\infty e^{-xz}\Phi_1(z)dz \tag{6.6}$$

$$=\int_0^\infty e^{-xz}dz\int_0^\infty e^{-yz}\Phi(y)dy$$

$$=\int_0^\infty \Phi(y)dy\int_0^\infty e^{-(x+y)z}dz$$

$$=\int_0^\infty \frac{\Phi(y)}{x+y}dy.$$

由于最后一个积分絕对收斂，所以积分(6.6)存在。

如果把 $F(x)$ 写成

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{\Phi(y)}{x+y}dy=\int_0^\infty e^{-xz}dz\int_0^\infty e^{-yz}\Phi(y)dy. \tag{6.7}$$

令

$$g_1(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sech}\frac{x}{2},\quad g_2(x)=\Phi(e^x)e^{x/2},\quad f(x)=F(e^x)e^{x/2},$$

則(6.7)式可以写成下列的形状：

$$f(x)=g_{1*}g_2(x).$$

現在設 $\varphi(x)$ 在区間 $(-\infty,\ \infty)$ 中連續而有界，并且方程

$$y-\frac{dy}{dx}=\varphi(x) \tag{6.8}$$

的滿足条件

$$y=o(e^x),\quad x\to\infty \tag{6.9}$$

的解存在的时候，这样的解是唯一的。否則的話，如果 y_1，y_2 是(6.8)的两个解，并且都滿足条件(6.9)，令 $y_1-y_2=g(x)$，則 $g(x)-g'(x)=0$. 这个方程一般解的形式为 Ae^x，如果还要滿足条件(6.9)，那么必須是 $A=0$.

下面我們指出，如果

$$g(x)=\begin{cases} e^x, & -\infty<x<0,\\ 0, & 0<x,\end{cases}$$

則 $g_*\varphi(x)$ 是方程(6.8)及(6.9)的唯一解。

根据假設，$\varphi(x)$ 是有界的，所以积分

$$\int_x^\infty e^{-t}\varphi(t)dt$$

存在。于是由

$$\int_x^\infty e^{-t}\varphi(t)\,dt=o(1),\quad x\to\infty$$

得到

$$y=e^x\int_x^\infty e^{-t}\varphi(t)\,dt=o(e^x),$$

且

$$y'=-\varphi(x)+e^x\int_x^\infty e^{-t}\varphi(t)\,dt.$$

因此

$$y-y'=\varphi(x).$$

§7 Dirichlet 型积分

設

$$D(\lambda, u)=\begin{cases}0, & |\lambda|>u,\quad u>0,\\ \dfrac{1}{2}, & \lambda=\pm u,\\ 1, & |\lambda|<u,\end{cases}$$

则 $D(\lambda, u)\in L_1(-\infty, \infty)$，而且它的 Fourier 变换是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} D(\lambda, u)e^{-i\lambda t}d\lambda\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-u}^{u} e^{-i\lambda t}d\lambda \qquad (7.1)\\ &=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin ut}{t}.\end{aligned}$$

$-u$ 0 u

图 7.1

由这个公式及定理 5.1，就得到

$$\frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\sin ut}{t}e^{i\lambda t}dt=\begin{cases}0, & |\lambda|>u,\\ \dfrac{1}{2}, & |\lambda|=u,\\ 1, & |\lambda|<u.\end{cases}\qquad (7.2)$$

在上面公式中取 $\lambda=0$，就得到

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin ut}{t}\,dt=1,\quad u>0.$$

由于等式的左边是 u 的奇函数，并且当 $u=0$ 时，它等于 0，所以

$$A(u)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin ut}{t}dt=\begin{cases}1, & u>0,\\ 0, & u=0,\\ -1, & u<0.\end{cases}\tag{7.3}$$

又因为 $\sin ut/t$ 是 t 的偶函数，所以有

$$\int_0^{\to\infty}\frac{\sin ut}{t}dt=\frac{\pi}{2},\quad u>0.$$

它就是(3.2)式。现在取(7.2)的实部，得到

$$\frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\sin x}{x}\cos\lambda x\,dx=D(\lambda)=D(\lambda,1).\tag{7.4}$$

式中的 $D(\lambda)$ 也能写作

$$D(\lambda)=\frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\sin x}{x}e^{-i\lambda x}dx.\tag{7.5}$$

这实际就是(7.2)式。在这里令 $x=\rho(\xi-t)$，以 t, ρ 为参变数，ξ 为自变数，则

$$D(\lambda)=\frac{1}{\pi}\lim_{T_1\to\infty}\int_{-T_1}^{T_1}\frac{\sin\rho(\xi-t)}{\rho(\xi-t)}e^{-i\lambda\rho(\xi-t)}\rho\,d\xi.$$

再令 $\lambda\rho=\sigma$，有

$$\frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\rho(\xi-t)}{\xi-t}e^{-i\sigma\xi}d\xi=e^{-i\sigma t}D\left(\frac{\sigma}{\rho}\right).\tag{7.6}$$

由(7.5)式，就有

$$\frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\sin x}{x}e^{-i(x-a)\lambda}dx=D(\lambda)e^{ia\lambda}.\tag{7.7}$$

分解出它的实部，就有

$$\frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\sin x}{x}\cos(x-a)\lambda\,dx=D(\lambda)\cos a\lambda.\tag{7.8}$$

把方程的两边对 λ 在区間 $(0,\lambda)$ 中积分，就得到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}d\lambda\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\sin x}{x}\cos(x-a)\lambda\,dx$$
$$=\int_0^{\lambda}D(\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda.\tag{7.9}$$

当 $\lambda=1$ 时，右边就是

$$\int_0^1 \cos a\lambda\, d\lambda = \frac{\sin a}{a},$$

并且对于 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有

$$\int_0^\lambda \cos a\lambda\, d\lambda = \frac{\sin a\lambda}{a}.$$

現在

$$\begin{aligned}
&\int_T^{T'} \frac{\sin x}{x} \cos(x-a)\lambda dx \\
&= \cos a\lambda \int_T^{T'} \frac{\sin x \cos \lambda x}{x} dx + \sin a\lambda \int_T^{T'} \frac{\sin x \sin \lambda x}{x} dx \\
&= \frac{\cos a\lambda}{2}\left(\int_T^{T'} \frac{\sin(1+\lambda)x}{x} dx + \int_T^{T'} \frac{\sin(1-\lambda)x}{x} dx\right) \\
&\quad + \frac{\sin a\lambda}{2}\left(\int_T^{T'} \frac{\cos(1-\lambda)x}{x} dx - \int_T^{T'} \frac{\cos(1+\lambda)x}{x} dx\right). \quad (7.10)
\end{aligned}$$

利用 (4.6) 我們知道括号内的积分对于 λ 是有界的 $\left(对于 \int_{-T'}^{-T} 也有同样的結果\right)$，因此 $\int_0^\lambda$ 及 $\lim\limits_{T\to\infty}$ 的順序可以交换，于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda d\lambda \int_{-T}^{T} \cdot dx \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\sin x}{x} dx \int_0^\lambda \cos(x-a)\lambda\, d\lambda \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin \lambda(x-a)}{x-a} dx.
\end{aligned}$$

由于积分中的函数是 $O\left(\frac{1}{x^2}\right)$，所以积分絕对收斂，因而可以看成是 Lebesgue 积分。于是

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \lambda(x-a)}{x-a} dx = \begin{cases} \dfrac{\sin a}{a}, & \lambda \geqslant 1, \\ \dfrac{\sin a\lambda}{a}, & |\lambda| \leqslant 1, \\ -\dfrac{\sin a}{a}, & \lambda \leqslant -1. \end{cases} \quad (7.11)$$

(对于 $\lambda<0$ 的情形，因为被积函数是 λ 的奇函数，所以結果显然

成立。)特别当 $a=0$, $\lambda=1$ 时,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx=1. \tag{7.12}$$

此外,

$$E(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx=\begin{cases}1, & \lambda\geqslant 1,\\ \lambda, & |\lambda|\leqslant 1,\\ -1, & \lambda\leqslant -1.\end{cases} \tag{7.13}$$

我們可以重复地使用上面的方法来計算积分

$$D_2(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cos\lambda x\,dx,$$

$$E_2(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx.$$

因为

$$2\sin x\cos\lambda x=\sin(1+\lambda)x+\sin(1-\lambda)x,$$

所以

$$\begin{aligned}D_2(\lambda)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cos\lambda x\,dx\\&=\frac{1}{2}\{E(1+\lambda)+E(1-\lambda)\}\\&=\begin{cases}0, & |\lambda|\geqslant 2,\\ 1-\dfrac{|\lambda|}{2}, & |\lambda|\leqslant 2.\end{cases}\end{aligned} \tag{7.14}$$

另外,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\lambda} D_2(\lambda)d\lambda\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx\int_0^{\lambda}\cos\lambda x\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\sin\lambda x\,dx.\end{aligned}$$

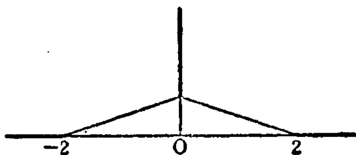


图 7.2

左边是 $\frac{1}{2}\int_0^{\lambda}\{E(1+\lambda)+E(1-\lambda)\}d\lambda$, 算出它的值就得到

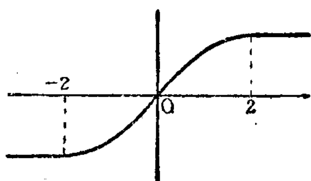


图 7.3

$$E_2(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{\sin\lambda x}{x}dx$$

$$=\begin{cases}1, & \lambda\geqslant 2,\\ \lambda-\dfrac{\lambda^2}{4}, & 0\leqslant\lambda\leqslant 2,\\ \lambda+\dfrac{\lambda^2}{4}, & -2\leqslant\lambda\leqslant 0,\\ -1, & \lambda\leqslant -2.\end{cases} \tag{7.15}$$

同样地

$$D_3(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cos\lambda x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{\sin(1+\lambda)x+\sin(1-\lambda)x}{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\{E_2(1+\lambda)+E_2(1-\lambda)\},$$

把它計算一下,就有

$$D_3(\lambda)=\begin{cases}0, & |\lambda|>3,\\ \dfrac{9}{8}-\dfrac{3\lambda}{4}+\dfrac{\lambda^2}{8}, & 1\leqslant\lambda\leqslant 3,\\ \dfrac{3}{4}-\dfrac{\lambda^2}{4}, & -1\leqslant\lambda\leqslant 1,\\ \dfrac{9}{8}+\dfrac{3\lambda}{4}+\dfrac{\lambda^2}{8}, & -3\leqslant\lambda\leqslant -1.\end{cases}$$

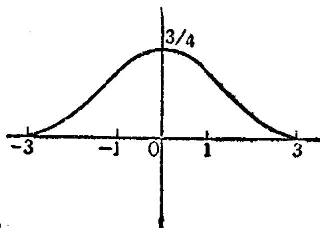


图 7.4

用同样的方法,可以順次地計算

$$D_p(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^p\cos\lambda x\,dx,$$

$$E_p(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^p\frac{\sin\lambda x}{x}dx,\quad p\text{ 正整数。}$$

如果 $|\lambda|\geqslant p$, 則

$$D_p(\lambda)=0.$$

此外,由公式(7.1)可知 $D(\lambda,\rho)$ 的 Fourier 变换是

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\rho t}{t}\quad(\rho>0),$$

因此根据定理 6.1, $D(\lambda,\rho_1)*D(\lambda,\rho_2)$的 Fourier 变換是

$$\sqrt{2\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\rho_1 t}{t}\,\frac{\sin\rho_2 t}{t}\quad(\rho_1,\rho_2>0).$$

于是根据反演公式有

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\rho_1 t}{t}\,\frac{\sin\rho_2 t}{t}\,e^{i\lambda t}dt=D(\lambda,\rho_1)*D(\lambda,\rho_2).$$

方程的右边当 $\rho_1+\rho_2<|\lambda|$ 时很容易明白是等于 0 的,所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\rho_1 t}{t}\cdot\frac{\sin\rho_2 t}{t}\,e^{i\lambda t}dt=0,\quad |\lambda|>\rho_1+\rho_2.\tag{7.16}$$

一般,如果作 n 个函数的結合函数,那末

$$\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\rho_k t}{t}\,e^{i\lambda t}dt=0,\quad |\lambda|>\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_n$$
$$(\rho_k>0,\ k=1,2,\cdots,n).\tag{7.17}$$

特别,从上面公式可以看出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\rho t}{t}\right)^n e^{i\lambda t}dt=0,\quad |\lambda|>n\rho>0.$$

§8 收斂定理

根据定理 4.1, 在适当的条件下[譬如 $f(x)$ 連續],有公式

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+\xi)\frac{\sin n\xi}{\xi}d\xi$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x+\frac{u}{n}\right)\frac{\sin u}{u}du.$$

現在我們研究一下,在什么样的条件之下,能成立下面的一般公式

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x+\frac{u}{n}\right)K(u)du.\tag{8.1}$$

定理 8.1 設 $f(x)$ 是 x 的連續函数,如果有

(i) $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$,

(ii) $K(u)\in L_1(-\infty,\infty)$,

(iii) $K(u)$：有界,

(iv) $K(u)=o(u^{-1})\quad(|u|\to\infty)$;

則

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{u}{n}\right)K(u)du=f(x)\int_{-\infty}^{\infty}K(u)du. \tag{8.2}$$

証明　令 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{u}{n}\right)K(u)du=\int_0^{\infty}+\int_{-\infty}^{0}$

$$=I_1+I_2,$$

其中

$$I_1=\int_0^{\infty} f\left(x+\frac{u}{n}\right)K(u)du=n\int_0^{\infty} f(x+\xi)K(n\xi)d\xi.$$

現在对于任意給定的 $\varepsilon>0$, 取 δ, 使得

$$|f(x+\xi)-f(x)|<\varepsilon,\quad |\xi|<\delta,$$

并令

$$I_1=n\int_0^{\delta}+n\int_{\delta}^{\infty}=J_1+J_2.$$

由于

$$\begin{aligned}J_1-f(x)&\int_0^{\infty}K(\xi)d\xi\\&=n\int_0^{\delta}f(x+\xi)K(n\xi)d\xi-nf(x)\int_0^{\infty}K(n\xi)d\xi\\&=n\int_0^{\delta}\{f(x+\xi)-f(x)\}K(n\xi)d\xi\\&\qquad+nf(x)\int_{\delta}^{\infty}K(n\xi)d\xi,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\left|J_1-f(x)\int_0^{\infty}K(\xi)d\xi\right|&\leqslant n\int_0^{\delta}|f(x+\xi)-f(x)||K(n\xi)|d\xi\\&\qquad+nf(x)\int_{\delta}^{\infty}|K(n\xi)|d\xi\\&\leqslant\varepsilon\int_0^{\infty}|K(\xi)|d\xi+f(x)\int_{\delta n}^{\infty}|K(\xi)|d\xi.\end{aligned}$$

因此

$$\limsup_{n\to\infty}\left|J_1-f(x)\int_0^{\infty}K(\xi)d\xi\right|\leqslant\varepsilon.$$

而 ε 是任意的，所以

$$\lim_{n\to\infty} J_1 = f(x)\int_0^\infty K(\xi)d\xi. \tag{8.3}$$

現在

$$|J_2| \leqslant n\int_\delta^\infty f(x+\xi)K(n\xi)d\xi,$$

据条件(iv)，

$$\leqslant n\int_\delta^\infty f(x+\xi)\,o\left(\frac{1}{n\xi}\right)d\xi$$

$$= o\left(\int_\delta^\infty \frac{|f(x+\xi)|}{\xi}d\xi\right) = o(1).$$

这就是說，$J_2\to 0$，于是据(6.2)有

$$\lim_{n\to\infty} I_1 = f(x)\int_0^\infty K(\xi)d\xi.$$

同样地能够証明

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = f(x)\int_{-\infty}^0 K(\xi)d\xi.$$

由这两个公式就証明了(8.2)式。 証毕

注意 在上面的定理中，如果 $|f(x)|\leqslant M$ (有界)，则仅仅假設 $K(u)\in L_1(-\infty, \infty)$，就可得(8.2)式。这是因为(8.2)式中的 lim 可以写到积分符号里面去。

例 1 設 $K(u)=\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2$.

根据(7.11)式有 $\int_{-\infty}^\infty K(u)du=1$，再由定理 8.1 及上面的注意，就可以看到下面的事实。

如果 $f(x)$ 有界，并且是属于 $L_1(-\infty, \infty)$ 的函数，且 $f(x)$ 連續，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi n}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\frac{\sin^2 n(\xi-x)}{(\xi-x)^2}d\xi = f(x). \tag{8.4}$$

例 2 設 $c_p=\int_{-\infty}^\infty\left(\dfrac{\sin\xi}{\xi}\right)^p d\xi$，$p>1$，则在例 1 同样的假設下

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}}{c_p}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\frac{\sin^p n(\xi-x)}{(\xi-x)^p}d\xi = f(x). \tag{8.5}$$

但是值得注意的是，$\dfrac{\sin u}{u}$ 不滿足定理 8.1 中关于 $K(u)$ 的

条件。也就是説，定理 4.1 不是定理 8.1 的特例。要找出能够包含定理 4.1 的 $K(u)$ 的条件是个困难的問題。

定理 8.2[1] 設 $f(x)$ 是 x 的連續函数，如果

(i) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}d\xi<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(\xi)|^p}{1+|\xi|}d\xi<\infty\quad (p>1),$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty}|K(\xi)|d\xi<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{q-1}|K(\xi)|^q d\xi<\infty,$

并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{\xi}{n}\right)K(\xi)d\xi=f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)d\xi. \qquad (8.6)$$

注意 这个定理当 $p=1$, $q=\infty$ 时也成立，也就是説，如果 $f(x)$ 对 x 連續，并且

(i) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}d\xi<\infty,$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty}|K(\xi)|d\xi<\infty,\ |\xi K(\xi)|<B$ （B 是与 ξ 无关的常数），

則公式(8.6)成立。

定理 8.2 的証明 如把 x 固定，并設 $\varphi(u)=f(x+u)$，則只需要証明下列两个公式成立卽可：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty} \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) K(\xi)d\xi=\varphi(0)\int_{0}^{\infty}K(\xi)d\xi, \qquad (8.7)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{0} \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) K(\xi)d\xi=\varphi(0)\int_{-\infty}^{0}K(\xi)d\xi. \qquad (8.8)$$

如果能証明(8.7)式，把其中的 $K(\xi)$，$\varphi(\xi)$ 分别換成

$$K(-\xi),\quad \varphi(-\xi)$$

来考虑，那就得到(8.8)式。所以只要証明(8.7)式。先考慮下列公式

$$I=\int_{0}^{\infty} \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) K(\xi)d\xi-\varphi(0)\int_{0}^{\infty} K(\xi)d\xi$$

---

[1] S. Bochner 及泉信一：东北数学杂志，42，1936.

$$=\int_0^\infty\left\{\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right)-\varphi(0)\right\}K(\xi)d\xi$$

$$=n\int_0^\infty\{\varphi(\xi)-\varphi(0)\}K(n\xi)d\xi.$$

因为根据假設，$\varphi(\xi)$在$\xi=0$处連續，所以对任意的$\varepsilon>0$，可以決定δ，使得$|\varphi(\xi)-\varphi(0)|<\frac{\varepsilon}{3A_1}$，$0\leqslant\xi\leqslant\delta$，其中

$$A_1=\int_0^\infty K|\xi|d\xi.$$

現在把积分I分成两部分

$$I=n\int_0^\delta+n\int_\delta^\infty=I_1+I_2. \tag{8.9}$$

$$|I_1|\leqslant n\int_0^\delta|\varphi(\xi)-\varphi(0)|K(n\xi)d\xi$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon n}{3A_1}\int_0^\delta|K(n\xi)|d\xi=\frac{\varepsilon}{3A_1}\int_0^\infty|K(\xi)|d\xi<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.10}$$

現在取这样的n_0，使得

$$\left(\int_{\delta n_0}^\infty|\xi|^{q-1}|K(\xi)|^q d\xi\right)^{1/q}\leqslant\frac{\varepsilon}{3A_2},$$

其中

$$A_2^p=\int_\delta^\infty\frac{|\varphi(\xi)|^p}{\xi}d\xi.$$

再取滿足条件

$$|\varphi(0)|\int_{\delta n_1}^\infty|K(\xi)|d\xi<\frac{\varepsilon}{3}$$

的n_1。令$N=\max(n_0,n_1)$，当$n>N$时，設

$$|I_2|=\left|n\int_\delta^\infty\varphi(\xi)K(n\xi)d\xi+n\varphi(0)\int_\delta^\infty K(n\xi)d\xi\right|$$

$$\leqslant n\int_\delta^\infty|\varphi(\xi)||K(n\xi)|d\xi+|\varphi(0)|\int_{\delta n}^\infty|K(\xi)|d\xi$$

$$=I_{2,1}+I_{2,2}.$$

应用 Hörder 不等式于$I_{2,1}$，就有

$$I_{2,1}\leqslant\left(\int_\delta^\infty\frac{|\varphi(\xi)|^p}{\xi}d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\delta^\infty n^q|\xi|^{q-1}|K(n\xi)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=A_2\cdot\left(\int_{\delta n}^\infty|\xi|^{q-1}\cdot|K(\xi)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $I_{2,2}<\frac{\varepsilon}{3}$，所以把这两个结果連同(8.10)代入(8.9)式，就得到

$$|I|<\varepsilon.$$

証毕

如果要証明注意中所述說的情况，那么只要証明上面的 $I_{2,1}$ 是零卽可。

因为我們能够确定这样的 b，使得

$$\int_b^\infty\frac{|\varphi(\xi)|}{\xi}d\xi<\frac{\varepsilon}{B}$$

成立，故

$$\left|n\int_b^\infty\varphi(\xi)K(n\xi)d\xi\right|\leqslant\left|\int_b^\infty\frac{\varphi(\xi)}{\xi}n\xi K(n\xi)d\xi\right|$$

$$\leqslant B\int_b^\infty\frac{|\varphi(\xi)|}{\xi}d\xi<\varepsilon.$$

因此只需要証明

$$\lim_{n\to\infty}n\int_\delta^b\varphi(\xi)K(n\xi)d\xi=0,\quad 0<\delta<b<\infty \qquad (8.11)$$

就够了。因为 $\varphi(\xi)/\xi\in L(\delta, b)$，所以存在着有界函数 $h(\xi)$，满足

$$\int_\delta^b|\varphi(\xi)/\xi-h(\xi)|d\xi<\frac{\varepsilon}{B}.$$

于是

$$\left|n\int_\delta^b\varphi(\xi)K(n\xi)d\xi\right|=\left|n\int_\delta^b\frac{\varphi(\xi)}{\xi}\xi K(n\xi)d\xi\right|$$

$$=\left|\int_\delta^b\left\{\frac{\varphi(\xi)}{\xi}-h(\xi)\right\}n\xi K(n\xi)d\xi+\int_\delta^b h(\xi)n\xi K(n\xi)d\xi\right|$$

$$\leqslant \int_{\delta}^{b}\left|\frac{\varphi(\xi)}{\xi}-h(\xi)\right||n\xi K(n\xi)|d\xi+\int_{\delta}^{b}|h(\xi)||n\xi K(n\xi)|d\xi.$$

但是 $|uK(u)|<B$, $|h(\xi)|<C$, 所以

$$\leqslant B\cdot\int_{\delta}^{b}\left|\frac{\varphi(\xi)}{\xi}-h(\xi)\right|d\xi+\frac{C}{n}\int_{\delta n}^{bn}|\xi K(\xi)|d\xi$$

$$<\varepsilon+bC\int_{\delta n}^{bn}|K(\xi)|d\xi\leqslant\varepsilon+bC\int_{\delta n}^{\infty}|K(\xi)|d\xi.$$

如果 n 取得相当大，上式最后的一項可以与零任意地接近，这样就証明了(8.11)。

例 設
$$K(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/2},$$
$f(x)$ 是連續函数，并且
$$\frac{f(\xi)}{1+|\xi|}\in L_1,$$
則
$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2\delta^2}}d\xi=f(x). \tag{8.12}$$

上面这个公式，就是在
$$\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x+\frac{\xi}{n}\right)K(\xi)d\xi=n\int_{-\infty}^{\infty}f(x+u)K(nu)du$$
$$=n\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)K(n(\xi-x))d\xi$$
中把 K 写成 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$，并令 $n=\frac{1}{\delta}$ 的結果。

(8.12)式的左边叫做 Weierstrass 的奇异积分。

§9 漸近公式

定理 9.1 設 $f(x)$ 是在 x 近傍具有 r 次連續导函数的函数，并且

(i) $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$,

(ii) $u^rK(u)\in L_1(-\infty,\infty)$, $K(u)\in L_1(-\delta,\delta)$, $\delta>0$,

(iii) $K(u)=o(u^{-1})\quad(|u|\to\infty)$,

則当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{u}{n}\right)K(u)du=f(x)\int_{-\infty}^{\infty}K(u)du+\frac{f'(x)}{1!n}\int_{-\infty}^{\infty}uK(u)du+\cdots$$
$$+\frac{f^{(r)}(x)}{r!\,n^r}\int_{-\infty}^{\infty}u^rK(u)du+o\left(\frac{1}{n^r}\right). \quad (9.1)$$

証明 令

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{u}{n}\right)K(u)du-\sum_{k=0}^{r}\frac{f^{(k)}(x)}{k!\,n^k}\int_{-\infty}^{\infty}u^kK(u)du$$
$$=n\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi)K(n\xi)d\xi-\sum_{k=0}^{r}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}n\int_{-\infty}^{\infty}\xi^kK(n\xi)d\xi$$
$$=n\int_{|\xi|<\delta}\left\{f(x+\xi)-\sum_{k=0}^{r}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\xi^k\right\}K(n\xi)d\xi$$
$$+n\int_{|\xi|\geqslant\delta}f(x+\xi)K(n\xi)d\xi-\sum_{k=0}^{r}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}n\int_{|\xi|\geqslant\delta}\xi^kK(n\xi)d\xi$$
$$=I_1+I_2+I_3.$$

根据 Taylor 定理有

$$f(x+\xi)-\sum_{k=0}^{r}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\xi^k=\frac{\xi^r}{r!}\{f^{(r)}(x+\theta\cdot\xi)-f^{(r)}(x)\} \quad (9.2)$$

$(\theta=\theta(\xi),0<\theta<1)$.现在对任意給定的 $\varepsilon>0$,取这样的 $\delta(\delta>1)$,使得

$$|\xi|<\delta \text{ 时}, \quad |f^{(r)}(x+\theta\xi)-f^{(r)}(x)|<\varepsilon.$$

I 已被分成 I_1, I_2, I_3 三个部分。把(9.2)代入 I_1, 則有

$$|I_1|<\varepsilon n\int_{|\xi|<\delta}\frac{|\xi|^r}{r!}|K(n\xi)|d\xi\leqslant\varepsilon n\int_{|\xi|<\delta}|K(n\xi)|d\xi$$
$$\leqslant\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}|K(\xi)|d\xi. \quad (9.3)$$

又利用条件(iii),得到

$$|I_2|\leqslant n\int_{|\xi|\geqslant\delta}\frac{|f(x+\xi)|}{\xi}|\xi K(n\xi)|d\xi$$
$$=n\int_{|\xi|\geqslant\delta}\frac{|f(x+\xi)|}{\xi}o\left(\frac{1}{n\xi}\right)d\xi$$
$$=o\left(\int_{|\xi|\geqslant\delta}^{\infty}\frac{|f(x+\xi)|}{\xi}d\xi\right)=o(1).$$

此外,

$$|I_3| \leqslant \sum_{k=0}^{r} \frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} n \int_{|\xi| \geqslant \delta} |\xi|^k |K(n\xi)| d\xi$$
$$= \sum_{k=0}^{r} \frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \frac{1}{n^k} \int_{|\xi| \geqslant n\delta} |\xi|^k |K(\xi)| d\xi$$
$$= \sum_{k=0}^{r} \frac{|f^{(k)}(x)|}{n^k k!} \cdot o(1) = o(1).$$

于是当 $n \to \infty$ 时，有

$$|I| \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |K(\xi)| d\xi + o(1).$$

因为 ε 是任意的，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} I = 0$. 証毕

定理 9.1 是定理 8.1 的推广。对于定理 8.2，也能考虑它的推广，这个問題的討論此处从略[1]。

特别令 $x=0$，則在定理 9.1 的假設条件下 (令 $u/n=\xi$)，可有下面的写法：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) K(n\xi) d\xi = \frac{f(0)}{n} \int_{-\infty}^{\infty} K(u) du + \frac{f'(0)}{n^2} \frac{1}{1!} \int_{-\infty}^{\infty} uK(u) du + \cdots + \frac{f^{(r)}(0)}{n^{r+1}} \frac{1}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} u^r K(u) du + o\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right). \tag{9.4}$$

例 設 $K(u) = \begin{cases} e^{-u}, & u>0, \\ 0, & u<0, \end{cases}$

則

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-nx} dx = \frac{1}{n} f(0) + \frac{1}{n^2} f'(0) + \frac{1}{n^3} f''(0) + \cdots + \frac{1}{n^{r+1}} f^{(r)}(0) + o\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right). \tag{9.5}$$

又如設

$$K(u) = \begin{cases} e^{-u^2}, & u>0, \\ 0, & u<0, \end{cases}$$

---

[1] 参看青沼龙雄：Kōdai Math. Sem. Rep.，近刊。

則有

$$\int_0^\infty f(x)e^{-n^2x}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2n}\left\{f(0)+\frac{1}{2!2}\frac{f''(0)}{n^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4!}\frac{3}{2^2}\frac{f^{(\mathrm{iv})}(0)}{n^4}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdots(2p-1)}{(2p)!2^p}\frac{f^{(2p)}(0)}{n^{2p}}\right\}$$
$$+\frac{1}{2n}\left\{\frac{f'(0)}{n}+\frac{1!}{3!}\frac{f'''(0)}{n^3}+\frac{2!}{5!}\frac{f^{(\mathrm{v})}(0)}{n^5}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{p!}{(2p+1)!}\frac{f^{(2p+1)}(0)}{n^{2p+1}}\right\}+o\left(\frac{1}{n^{2p+2}}\right),$$

又可写成

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2n}\left\{f(0)+\frac{1}{2!2}\frac{f''(0)}{n^2}+\frac{1}{4!}\frac{3}{2^2}\frac{f^{(\mathrm{iv})}(0)}{n^4}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1\cdot3\cdots(2p-1)}{(2p)!2^p}\frac{f^{(2p)}(0)}{n^{2p}}\right\}$$
$$+\frac{1}{2n}\left\{\frac{f'(0)}{n}+\frac{1!}{3!}\frac{f'''(0)}{n^3}+\frac{2!}{5!}\frac{f^{(\mathrm{v})}(0)}{n^5}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{(p-1)!}{(2p-1)!}\frac{f^{(2p-1)}(0)}{n^{2p-1}}\right\}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)^{[1]}. \tag{9.6}$$

§10 总和定理

现在考虑比 §9 中所讲的定理更一般的公式

$$\lim_{\delta\to0}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)K(x,u,\delta)du=f(x)$$

成立的条件。

定理 10.1 設当 $\delta\to0$ 时，存在着这样的正数 α，使得

$$K(x,u,\delta)=O\left(\frac{1}{\delta}\right),\quad |x-u|\leqslant\delta \tag{10.1}$$

$$=O\left(\frac{\delta^\alpha}{|x-u|^{1+\alpha}}\right),\quad |x-u|\geqslant\delta \tag{10.2}$$

成立。此外，有

---

[1] 用不同的方法来导出这些渐近公式的有 H. F. Willis: A formula for expanding an integral as a series, Phil. Mag., 39 (1948). 还有 C. J. Tranter: Integral transforms in Math. Phys., John Wiley, 1956.

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} K(x, u, \delta)du=1. \tag{10.3}$$

又如

$$f(x)/(1+|x|^{1+\alpha})\in L_1(-\infty, \infty),$$

则有

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} K(x, u, \delta)f(u)du=f(x). \tag{10.4}$$

但是这里假定

$$\int_{|u|\leqslant\delta} |f(x+u)-f(x)|du=o(\delta), \quad \delta\to 0. \tag{10.5}$$

証明 根据(10.3),事实上只需要証明

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \{f(u)-f(x)\}K(x, u, \delta)du=0 \tag{10.6}$$

即可。令

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} \{f(u)-f(x)\}K(x, u, \delta)du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x+u)-f(x)\}K(x, x+u, \delta)du$$

$$=\int_{|u|\leqslant\delta}+\int_{|u|>\delta}=I_1+I_2.$$

利用(10.1)就有常数 C_1, 使得下面的公式成立。

$$|I_1|\leqslant\int_{|u|\leqslant\delta} |f(x+u)-f(x)||K(x, x+u, \delta)|du$$

$$\leqslant C_1\cdot\frac{1}{\delta}\int_{|u|\leqslant\delta} |f(x+u)-f(x)|du.$$

于是根据(10.5),当 $\delta\to 0$ 时,整个的式子收斂于零,这也就是說

$$I_1\to 0 \qquad (\delta\to 0).$$

其次,利用(10.2),就得到

$$|I_2|\leqslant\int_{|u|>\delta} |f(x+u)-f(x)||K(x, x+u, \delta)|du$$

$$\leqslant C_2\delta^{\alpha}\int_{|u|>\delta} \frac{|f(x+u)-f(x)|}{|u|^{1+\alpha}}du. \tag{10.7}$$

现在只要証明最后的式子当 $\delta\to 0$ 时,收敛于零就够了。为了这个目的,令

$$\chi(t)=\int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,dx.$$

根据(10.5)所假設的,对于任意給定的 ε,存在着 η,使得

$$\chi(t)\leqslant \varepsilon t,\quad 0\leqslant t\leqslant \eta.$$

$$\delta^\alpha\int_{|u|>\delta}\frac{|f(x+u)-f(x)|}{|u|^{1+\alpha}}du=\delta^\alpha\int_{\delta<|u|\leqslant\eta}+\delta^\alpha\int_{|u|>\eta}$$
$$=I_{2,1}+I_{2,2},$$

$$I_{2,1}=\delta^\alpha\int_{\delta<|u|\leqslant\eta}\frac{|f(x+u)-f(x)|}{|u|^{1+\alpha}}du$$
$$=\delta^\alpha\left\{\left[\frac{\chi(t)}{t^{\alpha+1}}\right]_\delta^\eta+\left[\frac{\chi(t)}{|t|^{\alpha+1}}\right]_{-\eta}^{-\delta}\right\}+(\alpha+1)\delta^\alpha\int_{\delta<|t|<\eta}\frac{\chi(t)}{t^{\alpha+2}}dt$$
$$\leqslant 2\left(\varepsilon+\varepsilon(\alpha+1)\delta^\alpha\int_\delta^\eta\frac{dt}{t^{\alpha+1}}\right)\leqslant 2\varepsilon\left(1+\frac{\alpha+1}{\alpha}\right).\tag{10.8}$$

又因为

$$\lim_{\delta\to 0}I_{2,2}=\lim_{\delta\to 0}\delta^\alpha\int_{|u|>\eta}\frac{|f(x+u)-f(x)|}{|u|^{1+\alpha}}du=0,$$

所以把(10.8)代入(10.7)之内,就得到

$$I_2\to 0\qquad(\delta\to 0).$$

特别当

$$\delta=\frac{1}{\lambda},\qquad K(x,u,\delta)=\frac{\sin^2\lambda(x-u)}{\pi\lambda(x-u)^2}$$

时,可以取 $\alpha=1$,就能满足定理 10.1 中的条件,于是就有下面的定理。

定理 10.2 (i) 設 $f(x)/(1+x^2)\in L_1(-\infty,\infty)$,并且

$$\int_0^h |f(x+u)-f(x)|\,dx=o(h),\tag{10.9}$$

则

$$\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\frac{\sin^2\lambda(x-u)}{(x-u)^2}du=f(x).\tag{10.10}$$

(ii) 如果 $f(x)/(1+x^2)\in L_1(-\infty, \infty)$，那么几乎对于所有的 x 公式(10.10)成立。

这也就是§8中所講的例1的情况。至于(ii)，因为(10.9)几乎对于所有的 x 成立，所以是十分明显的。

公式(10.10)的左边叫做 $f(x)$ 的 **Fejér 积分**，$\frac{\sin^2\lambda x}{\pi\lambda x^2}$ 叫做 **Fejér 核**。

§11 反演公式及(C,α)总和法

設 $f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$，它的 Fourier 变换是 $F(t)$。根据定理5.1，如果 $f(x)$ 在 x 的近傍有界变分，則可以知道 $F(t)$ 的逆 Fourier 变换是 $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$。

現在我們考虑沒有"$f(x)$是有界变分"这个假定的情形。

一般，如果 $\varphi(x)$ 在有限区間内是可积的函数，且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|u|}{\lambda}\right)^{\alpha}\varphi(u)du=I, \quad \alpha\geqslant 0$$

存在的話，那么就說积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)du$ 为 (C, α) **可和**，并且总和是 I，有时写作

$$(C, \alpha)\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\varphi(u)du=I. \tag{11.1}$$

当 $\alpha=0$ 时，这个定义与

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\varphi(u)du$$

存在的意义是一样的。

定理 11.1 (i) 設 $f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$，它的 Fourier 变换是 $F(t)$，則对于几乎所有的 x，有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(C, \alpha)\int_{\to-\infty}^{\to\infty}e^{ixt}F(t)dt=f(x), \quad \alpha>0. \tag{11.2}$$

(ii) 在(i)的假設条件之下，对于滿足条件

$$\int_0^h |f(x+u)-f(x)|du=0(h) \tag{11.3}$$

的 x, (11.2)成立。

証明 根据定义只要証明，在(11.3)的条件之下，有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)e^{ixt}F(t)\,dt\to f(x) \tag{11.4}$$

卽可。

現在(11.4)的左边是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha}e^{ixt}dt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itu}f(u)\,du\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,du\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha}e^{it(x-u)}\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,du\,2\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha}\cos t(x-u)\,dt,\end{aligned}$$

令

$$K\left(x,\,u,\,\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha}\cos t(x-u)\,dt,$$

則

$$\begin{aligned}K\left(x,\,x+u,\,\frac{1}{\lambda}\right)&=\frac{\lambda}{\pi}\int_0^1(1-v)^{\alpha}\cos\lambda vu\,dv\\&=\frac{\alpha}{\pi u}\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}\sin\lambda vu\,dv\ (\text{根据分部积分法}),\end{aligned} \tag{11.5}$$

再設 $1-v=w/(\lambda|u|)$，則

$$\begin{aligned}K\left(x,\,x+u,\,\frac{1}{\lambda}\right)&=\frac{\alpha}{\pi\lambda^{\alpha}u\cdot|u|^{\alpha}}\int_0^{\lambda|u|}\frac{\sin(\lambda u-\operatorname{sgn}u\cdot w)}{w^{1-\alpha}}dw\text{[1]}\\&=\frac{\alpha}{\pi\lambda^{\alpha}|u|^{\alpha+1}}\int_0^{\lambda|u|}\frac{\sin(\lambda|u|-w)}{w^{1-\alpha}}dw.\end{aligned} \tag{11.6}$$

当 $\lambda|u|<1$ 时，这个积分的絕对值小于

$$\int_0^{\lambda|u|}\frac{1}{w^{1-\alpha}}dw$$

[1] $\operatorname{sgn}u$ 代表 u 的符号。

的絕对値，故有界；又当$\lambda|u|>1$时，有

$$\left|\int_1^{\xi} \frac{\sin(\xi-w)}{w^{1-\alpha}}\,dw\right| = \left|\int_1^{\xi'} \sin(\xi-w)\,dw\right| = O(1)$$

（第二中値定理）。

因此恒有

$$\int_0^{\lambda|u|} \frac{\sin(\lambda|u|-w)}{w^{1-\alpha}}\,dw = O(1).$$

于是由(11.6)有

$$K\left(x,\ x+u,\ \frac{1}{\lambda}\right) = O(\lambda^{-\alpha}|u|^{-\alpha-1}).$$

又由(11.5)有

$$K\left(x,\ x+u,\ \frac{1}{\lambda}\right) = O(\lambda).$$

另外，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} K\left(x,\ u,\ \frac{1}{\lambda}\right)du &= \int_{-\infty}^{\infty} K\left(x,\ x+u,\ \frac{1}{\lambda}\right)du \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u}\,du \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \sin\lambda vu\,dv \\
&= \lim_{U\to\infty} \frac{\alpha}{\pi}\int_{-U}^{U} \frac{1}{u}\,du \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \sin\lambda vu\,dv \\
&= \lim_{U\to\infty} \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}\,dv \int_{-U}^{U} \frac{\sin\lambda vu}{u}\,du.
\end{aligned}$$

由于右边的积分有界，所以

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}\,dv \lim_{U\to\infty}\int_{-U}^{U} \frac{\sin\lambda vu}{u}\,du \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}\,dv \int_{\to-\infty}^{\to\infty} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi \\
&= \alpha\int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}\,dv = 1.
\end{aligned}$$

这样就已經滿足了定理 11.1 中的K的一切条件，于是定理得証。 証毕

注意 对应于定理4.2的 Fourier 重积分定理，在(11.3)的条件下，成立着

$$\frac{1}{\pi}(C,\ \alpha)\int_0^{\to\infty} dt\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos t(u-x)\,du=f(x)\quad \alpha>0.$$

这里$(C,\ \alpha)$的意义是

$$(C,\ \alpha)\int_0^{\to\infty}(\cdot)\,dt=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1}(\cdot)\,dt.$$

§12 平均收斂

在前节中曾講述了一般的总和定理。在$(C,\ \alpha)$的情形中，核$K(x,\ u,\ \delta)$具有$K(x-u,\ \delta)$的形式。事实上，很多的核只是依賴于$x-u$. 所以本节特别研究下面形状的积分

$$\chi(x,\ \delta)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x-u,\ \delta)f(u)\,du,$$

并且討論一下，在什么样的条件下$\chi(x,\ \delta)$平均收斂于$f(x)$.

定理 12.1 如果

(i) $K(u,\ \delta)\geqslant 0,$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} K(u,\ \delta)\,du=1,$

(iii) $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{|u|\geqslant y}^{\infty} K(u,\ \delta)\,du=0$ ($y>0$，并且是固定的)，

那么当$f(x)\in L_1(-\infty,\ \infty)$时，

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|\chi(x,\ \delta)-f(x)|\,dx=0.$$

証明

$$\begin{aligned}\chi(x,\ \delta)-f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty} K(x-u,\ \delta)f(u)\,du-f(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty} K(v,\ \delta)f(x-v)\,dv-f(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty} K(v,\ \delta)\{f(x-v)-f(x)\}\,dv\quad(\text{根据(ii)}).\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x, \delta) - f(x)| dx \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} K(v, \delta) |f(x-v) - f(x)| dv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} K(x, v) dv \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-v) - f(x)| dx. \qquad (12.1)
\end{aligned}
$$

(12.1) 式中右边的积分，由于当任取 $\delta>0$ 时，根据 (ii)，$K(v, \delta)$恒是有界的，所以絕对收斂。于是积分的顺序可以交換。現在設

$$\varphi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-v) - f(x)| dx,$$

那么，大家熟知，当 $v \to 0$ 时，$\varphi(v) = o(1)$. 于是对于任意給定的 ε，取这样的 $\eta = \eta(\varepsilon)$，使得

$$|\varphi(v)| < \varepsilon, \quad |v| < \eta.$$

再令

$$
\begin{aligned}
I \leqslant & \int_{|v|<\eta} K(x, v) \varphi(v) dv \\
& + \int_{|v| \geqslant \eta} K(x, v) \varphi(v) dv = I_1 + I_2,
\end{aligned}
$$

則

$$|I_1| < \varepsilon \int_{|v|<\eta} K(x, v) dv \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K(x, v) dv = \varepsilon.$$

又

$$
\begin{aligned}
\varphi(v) &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-v)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.
\end{aligned}
$$

最后的积分成为常数 C，即 $\varphi(v)$是有界的，所以当 $\delta \to 0$ 时，

$$|I_2| \leqslant C \int_{|v| \geqslant \eta} K(x, v) dv \to 0 \quad (\text{根据(iii)}).$$

于是若对上面所确定的η选择δ这样小，使得最后的积分小于ε，則

$$|I|<2\varepsilon.$$

証毕

特別令

$$K(x,\delta)=K\left(x,\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin^2\lambda x}{\lambda x^2},$$

則本定理中一切假設的条件都能滿足。因此如果$f(x)\in L_1$，則

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\frac{\sin^2\lambda(x-u)}{(x-u)^2}du-f(x)\right|dx=0. \quad (12.2)$$

第2章 L_2的 Fourier 变换

§13 L_2 的 Fourier 变换

首先証明下面的定理。

定理 13.1 設 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，则存在着属于 L_2 的函数 $F(t)$，使得

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(x)e^{-ixt}dx\right|^2dt=0. \quad (13.1)$$

这个函数 $F(t)$ 叫做函数 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**。

証明 令

$$f_a(x)=f(x), \quad |x|\leqslant a,$$
$$=0, \quad |x|>a.$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f_a(x)|^2dx\to 0 \quad (a\to\infty). \quad (13.2)$$

再令

$$F_a(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_a(t)e^{-ixt}dx,$$

因为 $f_a(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，所以这个积分存在。

下面把一个积分計算一下。設 $\delta>0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\delta^2t^2}|F_a(t)|^2dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\delta^2t^2}dt\int_{-\infty}^{\infty}f_a(x)e^{-ixt}dx\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f_a(y)}e^{iyt}dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_a(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f_a(y)}dy\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\delta^2t^2+it(y-x)\right\}dt,$$

根据(3.15)，最后的积分等于$\frac{\sqrt{2\pi}}{\delta}e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2/\delta^2}$，所以

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta}\int_{-\infty}^{\infty}f_a(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f_a(y)}\,e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2/\delta^2}dy, \qquad (13.3)$$

利用重积分的 Schwarz 不等式,

$$\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2/\delta^2}dxdy\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(y)|^2e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2/\delta^2}dxdy\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2/\delta^2}dxdy\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2/\delta^2}du\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2dx.$$

这也就是說,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_a(t)|^2e^{-\frac{1}{2}\delta^2t^2}dt\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2dx.$$

在这里,如果取 $\delta\to0$, 由于 $e^{-\frac{1}{2}\delta^2t^2}$ 单調地趋近于1, 所以我們可以把 lim 的运算用在积分符号之內,而得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_a(t)|^2dt\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2dx.$$

这样就証明了 $F_a(t)\in L_2(-\infty,\infty)$.

由(13.3),

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\delta^2t^2}|F_a(t)|^2dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta}\int_{-\infty}^{\infty}f_a(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f_a(x+y)}\,e^{-\frac{1}{2}y^2/\delta^2}dy$$

$$=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2/\delta^2}dy\int_{-\infty}^{\infty}f_a(x)\overline{f_a(x+y)}dx$$

$$=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2/\delta^2}\varphi(y)dy. \qquad (13.4)$$

这里

$$\varphi(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_a(x)\overline{f_a(x+y)}dx.$$

这个函数 $\varphi(y)$, 因为它小于或等于

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x+y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx,$$

所以是有界的，又因为

$|\varphi(y_1)-\varphi(y_2)|$

$$\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x+y_1)-f_a(x+y_2)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以是連續的。于是根据 § 8 的例 1，有

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2/\delta^2}\varphi(y)dy=\varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2dx.$$

当 $\delta\to 0$ 时，根据(13.4)有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_a(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2dx. \tag{13.5}$$

其次，再把 $f_a(x)$ 换成 $f_a(x)-f_b(x)$，由(13.5)式有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_a(t)-F_b(t)|^2dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)-f_b(x)|^2dx=\int_{a<|x|<b}|f(x)|^2dx.$$

于是当 $b\to\infty$ 且 $a\to\infty$ 时，就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_a(t)-F_b(t)|^2dt\to 0.$$

因此，存在着满足下面关系的属于 $L_2(-\infty,\infty)$ 的函数 $F(t)$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_a(t)-F(t)|^2dt\to 0\quad(a\to\infty).$$

証毕

定理 13.1 中可以不用(13.1)式，而用下面的式子

$$\lim_{a\to\infty,\,b\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^a f(x)e^{-ixt}dx\right|^2dt. \tag{13.6}$$

这可用完全同样的方法来証明。

如果在定理13.1証明中的(13.5)式内，取 $a\to\infty$，就得到了下面定理中情形(i)的証明。

定理 13.2 (i) 設 $f\in L_2(-\infty,\infty)$，它的 Fourier 变换是 $F(t)$，則成立着

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(t)|^2dt. \tag{13.7}$$

(ii) 設 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，$g(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，它們的 Fourier 变换分别是 $F(t)$ 与 $G(t)$，則

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)G(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)g(x)dx, \tag{13.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\overline{G(t)}dt. \tag{13.9}$$

公式(13.7)，(13.8)，(13.9)都叫做 **Parseval 等式**。

令

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}g(x)e^{-itx}dx=G_a(t),\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(x)e^{-itx}dx=F_a(t),$$

根据假設有

$$\underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ G_a(x)=G(x),\quad \underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ F_a(x)=F(x). \tag{13.10}$$

公式(13.10)的意义是：$G_a(x)$ 与 $F_a(x)$ 分别平均收斂于 $G(x)$ 与 $F(x)$；也就是說，它們分別表示着下列的关系：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|G_a(x)-G(x)|^2dx\to0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_a(x)-F(x)|^2dx\to0.$$

再者这个时候，对于任意属于 L_2 的函数 $g(x)$，

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F_a(x)g(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)g(x)dx,$$

即

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F_a(x)g(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ F_a(x)\cdot g(x)dx. \tag{13.11}$$

証明 由(13.11)有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ G_a(x)dx$$

$$=\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G_a(x)dx$$

$$=\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} g(u)e^{-iux}du$$

$$=\lim_{a\to\infty}\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)dx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} g(u)e^{-iux}du$$

$$=\lim_{a\to\infty}\lim_{b\to\infty}\int_{-a}^{a} g(u)du\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-b}^{b} f(x)e^{-iux}dx$$

再一次的应用(13.11),则有

$$=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} g(u)du\ \underset{b\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-b}^{b} f(x)e^{-iux}dx$$

$$=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} g(u)F(u)du.$$

因为 $g(u)\in L_2$, $F(u)\in L_2$, 所以

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(u)du.$$

这样就証明了(13.8)。

至于(13.9)可以用完全同样的方法証明。另外还可以象下面这样地利用(13.7)来証明。

因为 $f(x)+g(x)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)+G(t)$,所以根据(13.7)有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)+g(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(t)+G(t)|^2dt,$$

于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx+\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx+2\Re^{①}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|F(t)|^2dt+\int_{-\infty}^{\infty}|G(t)|^2dt+2\Re\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\overline{G(t)}dt.$$

---

① $\Re$ 代表复数的实部, $\mathfrak{I}$ 代表复数的虚部。——譯者注

由此就得到了

$$\Re\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx=\Re\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\overline{G(t)}\,dt. \qquad (13.12)$$

此外，因为 $f(x)+ig(x)$ 的 Fourier 变换就是 $F(t)+iG(t)$，所以用同样的方法，能够証明

$$\mathfrak{i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx=\mathfrak{i}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\overline{G(t)}\,dt.$$

由这个公式和(13.12)，就証明了

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\overline{G(t)}\,dt.$$

証毕

注意 如果利用这样的事实，即 $G(x)$ 的逆 Fourier 变换是 $g(x)$ (下一节将要討論)，则 (13.8)与(13.9) 实質上是完全等价的公式。此外还可以把它們写成下面的形状：設 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，$g(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，而它們的 Fourier 变换分别是 $F(t)$ 与 $G(t)$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(-x)\,dx. \qquad (13.13)$$

此外，如果把 $g(y+x)$ 看成是 x 的函数，则

$$H_a(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} g(y+x)e^{-itx}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a+y}^{a+y} g(x)e^{-it(x-y)}\,dx=e^{ity}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a+y}^{a+y} g(x)e^{-itx}\,dx.$$

所以注意到 (13.6)，$g(x+y)$ 的 Fourier 变换就是 $e^{ity}G(t)$，其中 $G(t)$ 是 $g(x)$ 的 Fourier 变换。这样再根据(13.13)就得到了下面的公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)e^{ity}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)\,dx. \qquad (13.14)$$

§14 L_2 的 Fourier 变换的反演公式

当 $f\in L_1$ 的时候，它的 Fourier 变换 $F(t)$ 的逆 Fourier 变换，仅当对 f 加上了种种的假設以后，才能等于 $f(x)$。但是当 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ 的时候，$f(x)$ 的 Fourier 变换 $F(t)$ 的逆 Fourier 变换一定就是 $f(x)$ 本身。

定理 14.1 設 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，它的 Fourier 变换是

$$F(t)=\underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(x)e^{-itx}dx.$$

則 $F(t)\in L_2(-\infty,\infty)$，并且

$$f(x)=\underset{b\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-b}^{b}F(t)e^{itx}dt. \tag{14.1}$$

証明 关于 $F(t)\in L_2$ 这个事实已于定理 13.1 中証明过了。这样，根据定理 13.1，$F(t)$ 具有 Fourier 变换。也就是説，存在着函数 $\varphi(x)$，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-b}^{b}F(t)e^{itx}dt\right|^2dx\to 0\quad b\to\infty.$$

現在只需要指出，对于几乎所有的 x，都成立着 $\varphi(x)=f(x)$。

首先对于任意的 ξ，有

$$\begin{aligned}\int_0^{\xi}\varphi(x)dx&=\int_0^{\xi}dx\,\underset{b\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-b}^{b}F(t)e^{itx}dt\\&=\lim_{b\to\infty}\int_0^{\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx\int_{-b}^{b}F(t)e^{itx}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}F(t)\frac{e^{it\xi}-1}{it}dt.\end{aligned}$$

由于 $F(t)\in L_2(-\infty,\infty)$，$(e^{it\xi}-1)/(it)\in L_2(-\infty,\infty)$ $(\xi\neq 0)$，所以这个积分絕对收斂。于是

$$\int_0^{\xi}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\frac{e^{it\xi}-1}{it}dt. \tag{14.2}$$

現在令

$$g(x)=1,\quad 若\ x\ 在\ (0,\xi)\ 中;$$
$$g(x)=0,\quad 对其他的\ x,$$

則

$$\int_0^{\xi}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)dx.$$

因为 $g(x)$ 是 $L_2(-\infty,\infty)$ 中的函数，而

$$G_a(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}g(x)e^{-itx}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\xi}e^{-itx}dx=\frac{e^{-it\xi}-1}{-it}\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ |\xi|>a$$

是与 a 无关的函数，所以 $g(x)$ 的 Fourier 变换 $G(t)$ 就是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-it\xi}-1}{-it}$. 于是根据(13.9)有

$$\int_0^{\xi}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\overline{G(t)}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\frac{e^{it\xi}-1}{it}dt. \qquad (14.3)$$

由(14.2)及(14.3)就得到

$$\int_0^{\xi}\varphi(x)dx=\int_0^{\xi}f(x)dx,$$

所以 $f(x)=\varphi(x)$ 对于几乎所有的 x 都成立。　　　　証毕

$f(x)$ 与 $F(t)$ 的关系可用下列公式表示。

定理 14.2　設 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，并且它的 Fourier 变换是 $F(t)$，則几乎对于所有的 t，有

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{e^{-ixt}-1}{-ix}dx, \qquad (14.4)$$

对于几乎所有的 x，有

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\frac{e^{ixt}-1}{it}dt. \qquad (14.5)$$

証明　把(14.3)的两边对 ξ 微分即可。因为 $F(t)$ 的 Fourier 变换是 $f(-x)$，所以由(14.5)就得到

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}f(-x)\frac{e^{ixt}-1}{ix}dx$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{e^{-ixt}-1}{ix}dx.$$

这就是公式(14.4)。　　　　証毕

在 L_2 的情形中成立着与定理 11.1 同样的事实。

定理 14.3 設 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，并且它的 Fourier 变换是 $F(t)$，則当

$$\int_0^h |f(x+u)-f(x)|du=o(h) \tag{14.6}$$

的时候，有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(C,\alpha)\int_{\to-\infty}^{\to\infty} e^{ixt}F(t)\,dt=f(x),\quad \alpha>0. \tag{14.7}$$

注意 我們假定对于几乎所有的 x，(14.6)式成立。

証明
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha}e^{ixt}F(t)\,dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha}e^{ixt}\,dt\ \underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-a}^{a}e^{-iut}f(u)\,du\\
&=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha}e^{ixt}\,dt\int_{-a}^{a}e^{-iut}f(u)\,du\\
&=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}f(u)\,du\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha}e^{it(x-u)}\,dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,du\ 2\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha}\cos t(x-u)\,dt.
\end{aligned}$$

証明的后半部分与定理 11.1 的証法完全一样，故此从略。

第3章 Fourier-Stieltjes 积分

§15 单調函数

設 $\{F_n(x)\}$ 是定义于 $-\infty<x<\infty$ 的单調增加函数的函数序列。如果有这样的一个单調增加函数 $F(x)$，在 $F(x)$ 的連續点 x，

$$F_n(x)\to F(x),$$

则称 $F_n(x)$ **弱收斂于** $F(x)$，也簡单地說它**收斂于** $F(x)$。

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中連續，$F(x)$ 在 $[a, b]$ 中是单調函数。設 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是区間 $[a, b]$ 的一个分割，在 $[x_k, x_{k+1}]$ 中任意地取 ξ_k。假若当 $\delta=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1}-x_k)\to 0$ 时，

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left(F(x_{k+1})-F(x_k)\right)$$

与分割及 ξ_k 的选择都无关而存在，那么这个极限值就叫做 $f(x)$ 关于 $F(x)$ 的 Riemann-Stieltjes 积分。我們把它記作

$$\int_a^b f(x)dF(x).$$

如果 $f(x)$ 在 $-\infty<x<\infty$ 中連續，$F(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 中单調，并且

$$\lim_{b\to\infty,\, a\to-\infty}\int_a^b f(x)dF(x) \tag{15.1}$$

存在，就把这个极限值記作

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x).$$

如果 $f(x)$ 連續，則(15.1) 也簡称为 Stieltjes 积分。另外，如果

$F(x)$ 在 $-\infty<x<\infty$ 的任意有限区間中是有界变分函数，則因为它可以写成两个单調增加函数的差，所以关于这种函数的积分可以写成两个 Stieltjes 积分的差，因而也能定义关于这种 $F(x)$ 的 Stieltjes 积分。这种积分的一些性質是大家所熟悉的，故在此不另介紹。

下面先証一个 Helly-Bray 定理。

定理 15.1 設 $F_n(x)$ 是在 $[a, b]$ 中的单調增加函数 $(-\infty<a<b<\infty)$，$F_n(x)\to F(x)\ (n\to\infty)$，此外 $F_n(a)\to F(a)$，$F_n(b)\to F(b)$。則

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dF_n(x)=\int_a^b f(x)dF(x). \tag{15.2}$$

这里的 $f(x)$ 是在$[a, b]$ 中的連續函数。

証明 先取 $F(x)$ 以及 $F_n(x)\ (n=1, 2, 3\cdots)$ 的連續点 $x_{m,k}$。令

$$f_m(x)=\sum_{k=1}^{k_m} f(x_{m,k})I_{(x_{m,k},x_{m,k+1})}(x),$$

在这里

$$I_{(x_{m,k},x_{m,k+1})}(x)\begin{cases}=1, & x_{m,k}\leqslant x<x_{m,k+1},\\ =0, & \text{对其他的 } x.\end{cases}$$

于是由于

$$\int_a^b f_m(x)dF_n(x)=\sum_{k=1}^{k_m} f(x_{m,k})\int_a^b I_{(x_{m,k},x_{m,k+1})}(x)dF_n(x)\ [1]$$
$$=\sum_{k=1}^{k_m} f(x_{m,k})[F_n(x_{m,k+1})-F_n(x_{m,k})],$$

再根据 Stieltjes 积分的定义，当 $m\to\infty$，$\max(x_{m,k+1}-x_{m,k})\to 0$ 时，

$$\int_a^b f_m(x)dF_n(x)\to\int_a^b f(x)dF_n(x). \tag{15.3}$$

---

[1] $f_m(x)$ 不是連續的，所以右边应看做左边的定义。虽然 I 在所考虑的区間中为 1，在 $x_{m,k+1}$ 也不連續，但是 $\int_a^b I_{(x_m,x_{m,k+1})}(x)dF_n(x)=\int_{x_m}^{x_{m,k+1}}dF_n(x)$ 是有意义的。

同样地

$$\int_a^b f_m(x)dF(x)\to\int_a^b f(x)dF(x). \tag{15.4}$$

另外，因为对于一切的 m 和 k，当 $n\to\infty$ 时，有

$$F_n(x_{m,k+1})-F_n(x_{m,k})\to F(x_{m,k+1})-F(x_{m,k}).$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f_m dF_n(x)&=\sum_{k=1}^{k_m} f(x_{mk})\left[F_n(x_{m,k+1})-F_n(x_{m,k})\right]\\&\to\sum_{k=1}^{k_m} f(x_{mk})\left[F(x_{m,k+1})-F(x_{m,k})\right]\\&=\int_a^b f_m(x)dF(x).\end{aligned} \tag{15.5}$$

另外，命

$$\begin{aligned}I&=\int_a^b f(x)dF_n(x)-\int_a^b f(x)dF(x)\\&=\int_a^b \{f(x)-f_m(x)\}dF_n(x)\\&\quad+\left\{\int_a^b f_m(x)dF_n(x)-\int_a^b f_m(x)dF(x)\right\}\\&\quad+\int_a^b\{f_m(x)-f(x)\}dF(x)=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

当 $m\to\infty$ 时，$f_m(x)$ 收敛于 $f(x)$，即 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-f_m(x)|\to 0$。所以对任意給定的 ε，有这样的 m_0，如果 $m\geqslant m_0$，則 $\max|f(x)-f_m(x)|<\varepsilon$。又存在这样的 n_0，当 $n>n_0$ 时，有 $|F_n(b)-F(b)|<\varepsilon$，及 $|F_n(a)-F(a)|<\varepsilon$。于是当 $m>m_0$，$n>n_0$ 时，就有

$$|I_1|\leqslant\varepsilon\int_a^b dF_n(x)=\varepsilon(F_n(b)-F_n(a))\leqslant\varepsilon(F(b)-F(a)+2\varepsilon). \tag{15.6}$$

同样地，有

$$|I_3|\leqslant\varepsilon(F(b)-F(a)),\quad m>m_0. \tag{15.7}$$

另外取定一个 m，$m>m_0$，并令 $n\to\infty$，那么根据 (15.5) 就

有 $I_2\to 0$. 于是对于使 $m>m_0$ 成立的 m,

$$\left|\lim_{n\to\infty} I\right| \leqslant \varepsilon(F(b)-F(a)+2\varepsilon)+\varepsilon(F(b)-F(a)).$$

因为右边的式子与 m 无关,所以令 $\varepsilon\to 0$ 就得到

$$\lim_{n\to\infty} I=0. \qquad \text{証毕}$$

定理 15.2 設 $f(x)$ 在区間 $(-\infty, \infty)$ 中連續, $F_n(x)$ 在同区間中为一致有界的单調增加函数, $F_n(x)\to F(x)$, $(-\infty<x<\infty)$.

(i) 如果还有条件 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, 則

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF(x). \tag{15.8}$$

(ii) 如果 $f(x)$ 有界, 并且 $F_n(+\infty)\to F(+\infty)$, $F_n(-\infty)\to F(-\infty)$, 則(15.8)仍然成立。

証明 (i) 取 ε 及 A, 使得 $|f(x)|<\varepsilon$, $|x|>A$, 并設 $|F_n(x)|<K$. 对于 $B>A$, 有

$$\left|\int_A^B f(x)\,dF_n(x)\right| < \varepsilon\int_A^B dF_n(x)$$
$$=\varepsilon\{F_n(B)-F_n(A)\}<2\varepsilon\cdot K. \tag{15.9}$$

因为在 $-\infty$ 近傍的积分也是同样的,所以积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF_n(x)$$

存在。而积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF(x)$$

同样也存在。

現在令

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF_n(x)-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF(x)$$
$$=\left\{\int_{-A}^{A} f(x)\,dF_n(x)-\int_{-A}^{A} f(x)\,dF(x)\right\}+\int_{A}^{\infty} f(x)\,dF_n(x)$$
$$+\int_{-\infty}^{-A} f(x)\,dF_n(x)-\int_{A}^{\infty} f(x)\,dF(x)-\int_{-\infty}^{-A} f(x)\,dF(x)$$
$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

在(15.9)中，令 $B\to\infty$ 就得到

$$|I_2|\leqslant 2\varepsilon K, \quad |I_4|\leqslant 2\varepsilon K,$$

同样地有

$$|I_3|\leqslant 2\varepsilon K, \quad |I_5|\leqslant 2\varepsilon K.$$

积分 I_1 根据定理 15.1 收斂于零，于是証明完毕。

(ii) 取这样的 A，使 $|F_n(\infty)-F_n(A)|<\varepsilon$，并設 $|f(x)|\leqslant c$，則

$$\left|\int_A^\infty f(x)dF_n(x)\right|<c\int_A^\infty dF_n(x)<c\varepsilon.$$

对于积分 $\int_{-\infty}^{-A}$ 可以同样地处理，于是得知积分

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dF_n(x)$$

是存在的。至于积分

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dF(x)$$

也一样是存在的。

和(i)中的証明一样，根据定理 15.1，对于任意的 A，有

$$I_1\to 0 \quad (n\to\infty).$$

其次，因为 $F_n(\infty)\to F(\infty)$，所以对于任意的 $\varepsilon>0$，有这样的 n_0，使得

$$|F_n(\infty)-F(\infty)|<\varepsilon \quad (n>n_0). \tag{15.10}$$

又把 A 取为 $F(x)$ 相当大的連續点，使得

$$|F(A)-F(\infty)|<\varepsilon. \tag{15.11}$$

再取 $n>n_1$，使得

$$|F_n(A)-F(A)|<\varepsilon. \tag{15.12}$$

于是

$$|F_n(A)-F_n(\infty)|\leqslant|F_n(A)-F(A)| + |F(A)-F(\infty)|+|F(\infty)-F_n(\infty)|,$$

而根据(15.10)，(15.11)，(15.12)有

$$|F_n(A)-F_n(\infty)|<3\varepsilon.$$

于是

$$|I_2| \leqslant \int_A^\infty |f(x)|\,dF_n(x) \leqslant c\int_A^\infty dF_n(x)$$
$$= c\{F_n(\infty) - F_n(A)\} < 3\varepsilon c.$$

再引用一下 (15.11)，就有

$$|I_4| \leqslant c\int_A^\infty dF(x) = c(F(\infty) - F(A)) < \varepsilon c.$$

我們可以对 I_3, I_5 得到同样的估值，这样就証明了(ii)．証毕

§16 Fourier-Stieltjes 积分

設 $F(x)$ 是定义于 $(-\infty, \infty)$ 中的有界单調增加函数。又設 $F(\infty) = B$, $F(-\infty) = A$. 积分

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x), \quad -\infty < t < \infty \tag{16.1}$$

叫做 $F(x)$ 的 **Fourier-Stieltjes** 变換。当 $B=1$, $A=0$ 的时候，也可把 $F(x)$ 叫做**分布函数**，$f(t)$ 叫做**特征函数**。特别是在概率論中常常使用这样的名詞。

定理 16.1 函数 $f(t)$ 具有下面的性質：

(i) 对于 t 是一致連續的，

(ii) $|f(t)| \leqslant B - A$, $f(0) = B - A$,

(iii) $f(-t) = \overline{f(t)}$.

証明 (i) 取这样的 T，使得 $F(\infty) - F(T) < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $F(-T) < \dfrac{\varepsilon}{6}$. 对于任意給定的 ε，取 δ，使 $\delta < \dfrac{\varepsilon}{3T(B-A)}$，則当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时，就有

$$f(t_1) - f(t_2) = \int_T^\infty (e^{it_1x} - e^{it_2x})\,dF(x) + \int_{-\infty}^{-T} (e^{it_1x} - e^{it_2x})\,dF(x)$$
$$+ \int_{-T}^{T} (e^{it_1x} - e^{it_2x})\,dF(x)$$
$$= I_1 + I_2 + I_3,$$

这里

$$|I_1| \leqslant 2\int_T^\infty dF(x) = 2(F(\infty) - F(T)) < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (16.2)$$

同样地

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (16.3)$$

又

$$\begin{aligned} |I_3| &\leqslant \left| \int_{-T}^{T} e^{it_2x}(e^{i(t_1-t_2)x} - 1)\,dF(x) \right| \\ &\leqslant \int_{-T}^{T} |e^{i(t_1-t_2)x} - 1|\,dF(x) \\ &\leqslant \int_{-T}^{T} |t_1 - t_2|\,|x|\,dF(x) \\ &\leqslant |t_1 - t_2|\,T\int_{-T}^{T} dF(x) \leqslant |t_1 - t_2|\,T(B-A) \\ &< \delta T(B-A) \\ &< \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

于是結合(16.2), (16.3) 一齐考慮,就有

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon.$$

(ii)与(iii)的性質非常明显,証明略。 証毕

特别,令

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \quad (x < 0), \\ F(x) &= 1 \quad (x \geqslant 1). \end{aligned} \qquad (16.4)$$

对于这样的函数 $F(x)$, $f(x)$ 就成为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x) = 1,$$

即現在不能成立和 Riemann-Lebesgue 定理对应的事实。虽然这个例子中的 $F(x)$ 是不連續函数, 但是也有 $F(x)$ 連續而它的 Fourier-Stieltjes 积分不收斂于零的例子❶。 可是, 下面的定理成立。

---

❶ 参看河田: Fourier 分析与确率論(中文館,昭和 22 年).

定理 16.2 設 $f(t)$ 是 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换，则

(i) $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-ixt}\,dt = F(x+0)-F(x-0)$.

(ii) 特别，如果 $F(x)$ 連續，則

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-ixt}\,dt = 0.$$

証明 (i) $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-ixt}\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ixt}\,dt\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\,dF(u)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dF(u)\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i(x-u)t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin T(x-u)}{T(x-u)}\,dF(u).$$

$$\frac{\sin Tv}{Tv}\to 0 \quad (T\to\infty,\ v\neq 0),\quad \frac{\sin Tv}{Tv}=1 \quad (v=0).$$

因为 $\frac{\sin Tv}{Tv}$ 关于 T 一致地是 v 的有界函数，所以上列积分当 $T\to\infty$ 时的极限值，可以把极限运算施行于积分符号之内而求得。因此极限等于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(u)\,dF(u)$$

(这里 $\varepsilon(u)=0,\ u\neq x,\ \varepsilon(x)=1$)，这个积分明显地等于 $F(x+0)-F(x-0)$. 証毕

下面的定理揭示一个与 Parseval 等式类似的公式。

定理 16.3 設 $F(x)$ 的不連續点是 $x_\nu(\nu=\cdots,-1,0,1,\cdots)$. 令 $F(x_\nu+0)-F(x_\nu-0)=p_\nu$，则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} p_\nu^2. \qquad (16.5)$$

証明 $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\overline{f(t)}\,dt$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\,dF(x)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt}\,dF(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dF(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x-y)T}{(x-y)T}\,dF(y).$$

用定理 16.2 証法中的結果来考虑，就有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x+0)-F(x-0)\}dF(x)$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}p_\nu^2.$$ 証毕

§17 Fourier-Stieltjes 变换的反演公式

我們研究一下 Fourier-Stieltjes 变换的 Dirichlet 积分。为了簡单起見，假設 $F(x)$ 是有界非减函数，并且在它的不連續点，总有

$$F(x)=\frac{1}{2}\{F(x+0)+F(x-0)\}. \tag{17.1}$$

这时，我們説函数 $F(x)$ **已被标准化**。

定理 17.1 如果 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换是 $f(t)$，则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}f(t)dt=\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{ixt}dF(x). \tag{17.2}$$

証明 取 $T>|x|$，并令

$$I(T)=\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-T-x}^{T-x}\frac{\sin\lambda u}{u}f(u+x)du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}+\frac{1}{\pi}\int_{-T-x}^{-T}-\frac{1}{\pi}\int_{T-x}^{T}=I_1+I_2+I_3.$$

設 $F(\infty)=B$, $F(-\infty)=A$，则 $|f(t)|\leqslant B-A$，所以

$$|I_3|\leqslant\frac{1}{\pi}(B-A)\int_{T-x}^{T}\frac{du}{u}=\frac{B-A}{\pi}\log\frac{T}{T-x},$$

当 $T\to\infty$ 时，右边收斂于 0。于是

$$I_3\to 0\quad(T\to\infty). \tag{17.3}$$

同样地

$$I_2\to 0\quad(T\to\infty). \tag{17.4}$$

其次，

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\lambda u}{u}f(u+x)\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\lambda u}{u}du\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(u+x)v}\,dF(v)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixv}\,dF(v)\,\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\lambda u}{u}e^{iuv}\,du.$$

由(7.2)，取 $T\to\infty$，则有

$$\lim_{T\to\infty}I_1=\int_{-\infty}^{\infty}D(\lambda,\,v)e^{ixv}\,dF(v)\text{ ❶}.$$

其中

$$D(\lambda,\,v)=\begin{cases}0, & |v|>\lambda,\\ \dfrac{1}{2}, & |v|=\lambda,\\ 1, & |v|<\lambda.\end{cases}$$

也就是有

$$\lim_{T\to\infty}I_1=\int_{-\lambda+0}^{\lambda-0}e^{ixv}\,dF(v)+\frac{1}{2}\int_{-\lambda-0}^{-\lambda+0}e^{ixv}\,dF(v)+\frac{1}{2}\int_{\lambda-0}^{\lambda+0}e^{ixv}\,dF(v)$$
$$=\left(\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{ixv}\,dF(v)-\int_{-\lambda}^{-\lambda+0}-\int_{-\lambda-0}^{\lambda}\right)$$
$$+\frac{1}{2}e^{-ix\lambda}(F(-\lambda-0)-F(-\lambda+0))$$
$$+\frac{1}{2}e^{ix\lambda}(F(\lambda+0)-F(\lambda-0))$$
$$=\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{ixv}\,dF(v)-e^{-ix\lambda}(F(-\lambda+0)-F(-\lambda))$$
$$-e^{ix\lambda}(F(\lambda)-F(\lambda-0))+\frac{1}{2}e^{-ix\lambda}(F(-\lambda-0)-F(-\lambda+0))$$
$$+\frac{1}{2}e^{ix\lambda}(F(\lambda+0)-F(\lambda-0)),$$

把这个式子代到(17.1)之内，就得到

$$\lim_{T\to\infty}I_1=\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{ixv}\,dF(v).$$

由(17.3)，(17.4)以及这个式子就得到(17.2)。 証毕

---

❶ 正确地說，这里应該用 Lebesgue 收斂定理。

特別，如果在定理 17.1 中設 $x=0$，則有

$$F(\lambda)-F(-\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\lambda t}{t}f(t)dt. \qquad (17.5)$$

另外，如果以 $F\left(\xi+\frac{x}{2}\right)$ 代替 $F(\xi)$，則由于所对应的 Fourier-Stieltjes 变換变成 $e^{-\frac{1}{2}ixt}f(t)$，(17.5) 变为

$$F\left(\xi+\frac{x}{2}\right)-F\left(-\xi+\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{it\xi}-e^{-it\xi}}{it}e^{-\frac{1}{2}ixt}f(t)dt,$$

再进一步，設 $\xi=\frac{x}{2}$，就得到下面的結果。

定理 17.2 設有界单調增加函数 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变換是 $f(t)$，則

$$F(x)-F(0)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ixt}-1}{-it}f(t)dt. \qquad (17.6)$$

这里的 $F(x)$ 还要满足(17.1)。

上面的公式叫做 **P. Lévy 反演公式**。

定理 17.3 如果有界单調增加函数 $F(x)$的Fourier-Stieltjes 变換 $f(t)$ 属于 $L_1(-\infty,\infty)$，或属于 $L_2(-\infty,\infty)$，則 $F(x)$ 可写成不定积分

$$F(x)-F(-\infty)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)du. \qquad (17.7)$$

在这里 $\varphi(u)\geqslant 0$ (对于几乎所有的 u)。当 $f(t)\in L_1$ 时，$\varphi(u)$ 有界，并且对于一切 $1\leqslant r$，$\varphi(u)\in L_r$ 都成立。当 $f(t)\in L_2$ 时，对一切的 $1\leqslant r\leqslant 2$，$\varphi(u)\in L_r$ 都成立。

証明 若 $f(t)\in L_1$. 設 $f(t)$ 的普通的 Fourier 变換是 $\sqrt{2\pi}\,\varphi(u)$. 就是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-itu}\,dt=\sqrt{2\pi}\,\varphi(u).$$

这样，$\varphi(u)$ 显然是有界的。另外

$$\int_0^x \varphi(u)du=\int_0^x \frac{du}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itu}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\int_0^x e^{-itu}du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}-1}{-it}f(t)dt.$$

这个式子的右边和(17.6)的右边相等,所以

$$F(x)-F(0)=\int_0^x \varphi(u)du. \tag{17.8}$$

对这个公式的两边微分,就可看出对于几乎所有的 u, $\varphi(u)\geqslant 0$。取 $x\to-\infty$, 则有

$$F(-\infty)-F(0)=-\int_{-\infty}^0 \varphi(u)du.$$

由(17.8)减去上式,就得(17.7)。又取 $x\to\infty$, 由(17.7)得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)du=F(\infty)-F(-\infty).$$

这样,注意到 $\varphi(u)\geqslant 0$ 及 $\varphi(u)\in L_1(-\infty,\infty)$, 以及 $\varphi(u)$有界,就可以知道 $\varphi(u)\in L_r(1\leqslant r)$。

其次,設 $f(t)\in L_2(-\infty,\infty)$. 再設 $f(t)$ 的 L_2 的 Fourier 变换是$\sqrt{2\pi}\,\varphi(u)$, 即

$$\varphi(u)=\underset{U\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{U} e^{-itu}f(t)dt.$$

和上面的情形一样,利用 (13.11), 有

$$\int_0^x \varphi(u)du=\int_0^x du\,\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-itu}f(t)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^x du\int_{-T}^{T} e^{-itu}f(t)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx}-1}{-it}f(t)dt.$$

于是根据(17.6),有

$$F(x)-F(0)=\int_0^x \varphi(u)du,$$

和前面一样,$\varphi(u)\in L_1(-\infty,\infty)$, 又因为$\sqrt{2\pi}\,\varphi(u)$是$f\in L_2$的

Fourier 变换，所以 $\varphi(u)\in L_2(-\infty,\infty)$。因此 $\varphi(u)\in L_r(-\infty,\infty)$，$1\leqslant r\leqslant 2$。　　証毕

§18 Parseval 等式

設 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 是在区間 $(-\infty,\infty)$ 中有界单調增加函数，并且为簡单起見，設为連續的[1]。令

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_1(x-u)dF_2(u)=F(x),\tag{18.1}$$

那么不难理解，$F(x)$ 也是有界单調增加而且是連續的。$F(x)$ 叫做 F_1 与 F_2 的**結合函数**。为了与 §6 使用完全相同的記法，而避免混乱，所以写作

$$F(x)=F_1*F_2(x).\tag{18.2}$$

它与 F_2*F_1 是相等的。

定理 18.1　設 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换分别是 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，那么 $F_1*F_2=F$ 的 Fourier-Stieltjes 变换 $f(t)$ 等于 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的乘积。

証明

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}d\left(\int_{-\infty}^{\infty}F_1(x-u)dF_2(u)\right)$$

$$=\lim_{B\to\infty,A\to-\infty}\int_A^B$$

$$=\lim_{B\to\infty,A\to-\infty}\lim\sum_{\nu=1}^{n}e^{itx_\nu}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}F_1(x_\nu-u)dF_2(u)\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{\infty}F_1(x_{\nu-1}-u)dF_2(u)\right\},$$

在这里，假設 $A=x_0<x_1<\cdots<x_n=B$，并且 lim 是在 $n\to\infty$，$\max(x_\nu-x_{\nu-1})\to 0$ 的意义下来理解的。于是

$$=\lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to\infty}}\lim\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{n}e^{itx_\nu}\{F_1(x_\nu-u)-F_1(x_{\nu-1}-u)\}\right]dF_2(u).\tag{18.3}$$

---

[1] 如果积分是 Lebesgue-Stieltjes 积分，就不用这一假定。

由于

$$\left|\sum_{1}^{n} e^{itx_\nu}\{F_1(x_\nu-u)-F_1(x_{\nu-1}-u)\}\right|$$

$$\leqslant \sum_{1}^{n}\{F_1(x_\nu-u)-F_1(x_{\nu-1}-u)\}=F_1(B)-F_1(A),$$

而这是有界的，所以允許把 (18.3) 中的 lim 符号移到积分符号之內来运算，就有

$$(18.3)=\lim_{B\to\infty,\ A\to-\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dF_2(u)\int_A^B e^{itx}dF_1(x-u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dF_2(u)\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF_1(x-u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}dF_2(u)\int_{-\infty}^{\infty}e^{it(x-u)}dF_1(x-u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}dF_2(u)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{itv}dF_1(v)=f_1(t)f_2(t).$$

証毕

此外，如果 F_1, F_2, F_3 中任何一个都是有界連續单調函数，則成立

$$(F_1*F_2)*F_3=F_1*(F_2*F_3). \tag{18.4}$$

§ 19 单調函数列的收斂

設 $\{F_n(x)\}$ 是单調函数列，令 $F_n(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换是 $f_n(t)$。又設 $F_n(x)$ 在所有它的不連續点处都已被标准化。

現在証明下面的定理。

定理 19.1 設有一个与 n 无关的常数 M，使得

$$F_n(\infty)-F_n(-\infty)\leqslant M \tag{19.1}$$

成立。又設 $f_n(t)$ 对于几乎所有的 t 都收斂于一个函数 $f(t)$，則

(i) $F_n(x)-F_n(-\infty)$ 收斂于一个单調增加函数（弱收斂）。

(ii) 对于几乎所有的 t，成立着

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF(x). \tag{19.2}$$

証明 对

$$f_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF_n(x)$$

两边施以积分，就有

$$\begin{aligned}\int_0^t f_n(t)dt&=\int_0^t dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF_n(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF_n(x).\end{aligned} \tag{19.3}$$

取 A，使得 $A>2M/\varepsilon$，其中 ε 是任意的正数。由(19.1)我們容易理解，$F_n(x)-F_n(-\infty)$ 是一致有界的。于是据大家所熟悉的定理，可以找到标数 n 的部分数列 n_k $(k=1,2,\cdots)$，使得对于几乎所有的 x，有

$$F_{n_k}(x)-F_{n_k}(-\infty)\to F(x).$$

再根据定理 15.1，有

$$\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF_{n_k}(x)\to\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF(x)\quad(k\to\infty). \tag{19.4}$$

又因为

$$|f_n(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}dF_n(x)\leqslant M,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t f_n(u)du=\int_0^t f(u)du. \tag{19.5}$$

再者

$$\begin{aligned}\left|\int_{|x|>A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF_n(x)\right|&\leqslant\frac{2}{A}\int_{|x|>A}dF_n(x)\leqslant\frac{2}{A}\int_{-\infty}^{\infty}dF_n(x)\\&\leqslant\frac{2M}{A}<\varepsilon.\end{aligned} \tag{19.6}$$

于是由 (19.3)，就有

$$\left|\int_0^t f(u)du-\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF(x)\right|=\left|\int_0^t f(u)du-\int_0^t f_{n_k}(u)du\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF_{n_k}(x)-\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF(x)\right|$$

$$=\left|\int_0^t f(u)du-\int_0^t f_{n_k}(u)du+\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF_{n_k}(x)\right.$$

$$\left.-\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF(x)+\int_{|x|>A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF_{n_k}(x)\right|$$

$$\leqslant\left|\int_0^t f(u)du-\int_0^t f_{n_k}(u)du\right|+\left|\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF_{n_k}(x)\right.$$

$$\left.-\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF(x)\right|+\left|\int_{|x|>A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF_{n_k}(x)\right|.$$

由于(19.6)，最后一項的值不能超越 ε。当 $k\to\infty$ 时，右边的第一，第二两項由(19.5)及(19.4)可知它們都收斂于零。于是

$$\left|\int_0^t f(u)du-\int_{-A}^{A}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF(x)\right|<\varepsilon.$$

因此

$$\int_0^t f(u)du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF(x).$$

把这个式子对 t 微分，那么对于几乎所有的 t，恒有

$$f(t)=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}-1}{ix}dF(x).$$

又因为

$$\left|\frac{e^{ixt}-1}{ix}-\frac{e^{ixt'}-1}{ix}\right|=\left|\frac{e^{ix(t-t')}-1}{ix}\right|,$$

如把 t 固定，并令 $|t-t'|<\delta$，那么我們能够容易地証明，函数对于 x 一致地有界，而不超过一个定数。所以允許在上面的公式中把微分移到积分符号之內，从而知道

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF(x) \tag{19.2'}$$

对于几乎所有的 t 都成立。这样就証明了(ii)。

其次,根据定理 18.2 及(19.2)成立着

$$F(x)-F(0)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ixt}-1}{it}f(t)dt. \qquad (19.3')$$

若是 $F_n(x)-F_n(-\infty)$ 不收斂的話,例如有这样的数列 $\{n'_k\}$,对于它 $F_{n'_k}(x)-F_{n'_k}(-\infty)$ 并不收斂于 $F(x)$.那么我們可以在数列 $\{n'_k\}$ 内取一个子列 $\{n''_k\}$,对于它 $F_{n''_k}(x)-F_{n''_k}(-\infty)$ 收斂于 $F_1(x)$,而 $F_1(x)-F_1(0)$ 与 $F(x)-F(0)$ 不妨假設是不同的。但是对于 F_1,可以象上面这样地得到相同的 (19.3′)(仅把 F 改成 F_1). 因为 (19.3′) 的右边是一样的,所以得到 $F(x)-F(0)=F_1(x)-F_1(0)$,从而导出矛盾。于是証明了 $F_n(x)-F_n(-\infty)$ 必定收斂于 $F(x)$. 証毕

定理 19.2 对于单調增加函数列 $\{F_n(x)\}$ 設 $F_n(\infty)=B$, $F_n(-\infty)=A$. 又設 $F_n(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变換是 $f_n(t)$, $f_n(t)$ 对于几乎所有的点收斂于一个函数 $f(t)$, $f(t)$ 在 $t=0$ 处連續,并且 $f(0)=B-A$. 那末, $F_n(x)$ 就收斂于一个单調增加函数 $F(x)$, $F(\infty)=B$, $F(-\infty)=A$, 并且 $f(t)$ 对于几乎所有的 t 等于 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换。

証明 不失去問題的一般性可設 $A=0$. 这时不妨把 $F_n(x)$ 考虑为 $F_n(x)-A$. 于是根据定理 19.1, $F_n(x)-F_n(-\infty)$ 收斂于一个单調增加函数 $F(x)$. 因为現在 $F_n(-\infty)=0$, 所以 $F_n(x)$ 收斂于 $F(x)$. 这样,对于几乎所有的 t 成立着

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF(x). \qquad (19.7)$$

余下我們所要証明的,就是

$$F(+\infty)-F(-\infty)=B. \qquad (19.8)$$

(19.8) 实际所指出的,就是 $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=B$. 要不是这样的話,那么根据假設 $F(-\infty)\geqslant\eta>0$, 而由 (19.8) 有 $F(+\infty)\geqslant B+\eta$. 又因为 $F_n(\infty)=B$, 所以 $F_n(x)\leqslant B$, 就是說

由于 $F_r(x)\to F(x)$，就有 $F(\infty)\leqslant B$，这样就引出矛盾。于是 $F(-\infty)=0$，而由(19.8)就有 $F(+\infty)=B$.

现在証明(19.8)。先取使(19.7)成立的数列$\{t_m\}$，并設 $t_m\to 0$，于是在

$$f(t_m)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_mx}dF(x)$$

中令 $t_m\to 0$，則根据假設有 $f(t_m)\to B$. 又公式的右边收斂于 $\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)$. 因此

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)=F(+\infty)-F(-\infty). \qquad \text{証毕}$$

下面証明一下定理 19.2 的逆定理。

定理 19.3 設 $\{F_n(x)\}$ 是单調增加的函数列，并設 $F_n(\infty)=B$, $F_n(-\infty)=A$. 如果 $F_n(x)$收斂于一个单調增加函数 $F(x)$，并且 $F(\infty)=B$, $F(-\infty)=A$，那么 $F_n(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换在任意有限区間中一致收斂于 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换。

証明 不失去一般性可令 $A=0$, $B=1$，因为可以代替 $F_n(x)$ 及 $F(x)$ 而考虑 $\frac{1}{B-A}(F_n(x)-A)$ 及 $\frac{1}{B-A}(F(x)-A)$，这时仅是它們的 Fourier-Stieltjes 变换扩大了$\frac{1}{B-A}$倍。

于是取 $A=0$, $B=1$，并且对任意的正数 ε，取这样的 X，使得 X 和 $-X$ 都是 $F(x)$ 的連續点，并且 $F(-X)<\frac{\varepsilon}{12}$, $1-F(X)<\frac{\varepsilon}{12}$. 对于这个 X 决定 N_0，当 $n\geqslant N_0$ 时，有

$$|F_n(X)-F(X)|<\frac{\varepsilon}{12}, \quad |F_n(-X)-F(-X)|<\frac{\varepsilon}{12}. \tag{19.9}$$

因为 $F_n(\pm X)\to F(\pm X)$，所以这种取法是可能的。又任意地取定 T，考虑这样的 t, $|t|\leqslant T$. 再决定这样的 N_1，使得 $n\geqslant N_1$ 时，

$$\int_{-X}^{X}|F_n(x)-F(x)|dx<\frac{\varepsilon}{6T}. \qquad (19.10)$$

令 $N=\max(N_0, N_1)$. 設

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF_n(x)-\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF(x)\right|\leqslant\left(\int_{-\infty}^{-X}+\int_{X}^{\infty}\right)dF_n(x)$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{-X}+\int_{X}^{\infty}\right)dF(x)+\left|\int_{-X}^{X}e^{ixt}d(F_n(x)-F(x))\right|$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

若是 $n\geqslant N$, 用(19.9)就有

$$0\leqslant I_1\leqslant F_n(-X)+\{1-F_n(X)\}$$

$$\leqslant F(-X)+1-F(-X)+\frac{\varepsilon}{6}\leqslant\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

$$0\leqslant I_2\leqslant F(-X)+\{1-F(X)\}\leqslant\frac{\varepsilon}{12}+\frac{\varepsilon}{12}=\frac{\varepsilon}{6}.$$

再使用分部积分法，就有

$$I_3\leqslant|e^{ixt}(F_n(X)-F(X))|+|e^{-ixt}(F_n(-X)-F(-X))|$$

$$+\left|it\int_{-X}^{X}e^{ixt}(F_n(x)-F(x))dx\right|$$

$$\leqslant|F_n(X)-F(X)|+|F_n(-X)-F(-X)|$$

$$+T\int_{-X}^{X}|F_n(x)-F(x)|dx.$$

这个式子，由于(19.10)及(19.9)而

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{12}+\frac{\varepsilon}{12}+\frac{\varepsilon}{6}.$$

于是

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF_n(x)-\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dF(x)\right|<\varepsilon.$$

証毕

第4章　Mellin 变換与 Hankel 变換

§20　Mellin 变換

設 $s=\sigma+it$（σ, t 是定数），$f(x)x^{\sigma-1}\in L_1(0,\infty)$. 那么，当 $f(x)x^{s-1}\in L_1(0,\infty)$ 时，

$$\mathfrak{F}(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \tag{20.1}$$

就叫做 $f(x)$ 的 Mellin 变換。如設 $x=e^y$，則 y 在 $(-\infty,\infty)$ 中变化。我們来考虑 $f(e^y)e^{\sigma y}$，$(-\infty<y<\infty)$，可以看出

$$\int_{-\infty}^\infty |f(e^y)|e^{\sigma y}dy=\int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1}dx<\infty,$$

所以这个函数的逆 Fourier 变換是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(e^y)e^{\sigma y}e^{ity}\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx.$$

于是 $f(x)$ 的 Mellin 变換 $\mathfrak{F}(s)$ 恰好就是 $\sqrt{2\pi}f(e^y)e^{\sigma y}$ 的 Fourier 变換，所以 Mellin 变換从理論上来看可以归結为 Fourier 变換。譬如，下面就把問題化成 Fourier 变換的情形来导出 Mellin 变換的反演公式。

定理 20.1　設 $f(x)x^{\sigma-1}\in L_1(0,\infty)$，并且在 x 的近傍 $f(x)$ 是有界变分函数。如果 $f(x)$ 的 Mellin 变換是 $\mathfrak{F}(s)$ $(s=\sigma+it)$，那么

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\mathfrak{F}(s)x^{-s}ds. \tag{20.2}$$

証明　把 $\mathfrak{F}(s)$ 看成为 t 的函数 $(s=\sigma+it)$。因为它是函数 $\sqrt{2\pi}f(e^y)e^{\sigma y}=\sqrt{2\pi}\varphi(y)$ 的 Fourier 变換，据定理 5.1(令 $x=e^y$,

$\varphi(y)$ 在 y 的近傍为有界变分），有

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\{\varphi(y+0)+\varphi(y-0)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}\mathfrak{F}(\sigma+it)e^{-iyt}dt.$$

令 $x=e^y$，则有

$$\varphi(y+0)+\varphi(y-0)=\{f(x+0)+f(x-0)\}x^{\sigma},$$

根据这式，上面的式子就变成

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}&=\lim_{T\to\infty}\frac{x^{-\sigma}}{2\pi}\int_{-T}^{T}\mathfrak{F}(\sigma+it)x^{-it}dt\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\mathfrak{F}(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}dt\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\mathfrak{F}(s)x^{-s}ds.\end{aligned}$$

証毕

同样能証明，对 Mellin 变换成立着下面这些和 §11 中同样的定理（証明从略）。

定理 20.2　設 $f(x)x^{\sigma-1}\in L_1(0,\infty)$，$f(x)$ 的 Mellin 变换是 $\mathfrak{F}(s)\,(s=\sigma+it)$. 如果 $f(x)$ 在点 x 处連續，那么对于几乎所有的 x，有

$$f(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\mathfrak{F}(s)x^{-s}ds. \tag{20.3}$$

又和 L_2 理論类似地成立着下面的定理。

定理 20.3　設 $\Re s=\sigma$，$x^{\sigma-\frac{1}{2}}f(x)\in L_2(0,\infty)$. 如果令

$$\mathfrak{F}(s,A)=\int_{1/A}^{A}f(x)x^{s-1}dx, \tag{20.4}$$

則 $\mathfrak{F}(s,A)$ 在区間 $(\sigma-i\infty,\ \sigma+i\infty)$ 中平均收斂于一个函数 $\mathfrak{F}(s)$，就是説存在着 $\mathfrak{F}(s)$，使得

$$\lim_{A\to\infty}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}|\mathfrak{F}(s)-\mathfrak{F}(s,A)|^2ds=0. \tag{20.5}$$

此外，如果令

$$f(x,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-ia}^{\sigma+ia}\mathfrak{F}(s)x^{-s}ds, \tag{20.6}$$

則有

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty |f(x)-f(x,a)|^2 x^{2\sigma-1}dx=0. \qquad (20.7)$$

并且有

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 x^{2\sigma-1}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |\mathfrak{F}(\sigma+it)|^2 dt. \qquad (20.8)$$

其中 $\mathfrak{F}(s)$ 称为 $f(x)$ 的 **Mellin 变换**。

定理 20.4 設 $x^{\sigma-\frac{1}{2}}f(x)$ 以及 $x^{1-\sigma-\frac{1}{2}}g(x)$ 都是属于 $L_2(0,\infty)$ 的函数，并且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Mellin 变换分别是 $\mathfrak{F}(s)$ 及 $\mathfrak{G}(s)$，則

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(1-s)ds. \qquad (20.9)$$

定理 20.5 設 $x^{\sigma-\frac{1}{2}}f(x)\in L_2(0,\infty)$, $x^{c-\sigma-\frac{1}{2}}g(x)\in L_2(0,\infty)$, f, g 的 Mellin 变换分别是 $\mathfrak{F}(s)$, $\mathfrak{G}(s)$，則 $f(x)g(x)$ 的 Mellin 变换是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathfrak{F}(w)\mathfrak{G}(s-w)dw, \quad s=c+it.$$

下面我們举几个关于 Mellin 变换的例子。設 $f(x)x^{\sigma-1}\in L_1$, $f(x)$ 的 Mellin 变换是 $\mathfrak{F}(s)$, $s=\sigma+it$. 象这样的 $f(x)$ 及 $\mathfrak{F}(s)$ 有下面几个簡单的例子：

$f(x)$,	$\mathfrak{F}(s)$,	σ,	
$\begin{cases}1, & 0\leqslant x<a,\\ 0, & x\geqslant a,\end{cases}$	$\frac{a^s}{s}$,	$\sigma>0$,	(20.10)
$\begin{cases}\log(a/x), & 0<x<a,\\ 0, & x\geqslant a,\end{cases}$	$\frac{a^s}{s^2}$,	$\sigma>0$.	(20.11)

又如果設

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \quad (\Re s>1), \qquad (20.12)$$

則

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x-1}x^{s-1}dx=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\sum_{k=0}^\infty e^{-kx}dx$$

$$=\sum_{k=0}^\infty\int_0^\infty e^{-(1+k)x}x^{s-1}dx$$

$\left(\text{容易理解此处}\int\text{与}\sum\text{允許交換}\right)$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+k)^s}\int_0^{\infty}e^{-u}u^{s-1}du=\Gamma(s)\zeta(s).$$

这就說明了$(e^x-1)^{-1}$的 Mellin 变換是$\Gamma(s)\zeta(s)$ $(\Re s>1)$. 同样能証明, $(e^x+e^{-x})^{-1}$的 Mellin 变換是$\Gamma(s)L(s)$ $(\Re s>0)$. 这里

$$L(s)=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\cdots(\Re s>0).$$

§21 Hankel 变換

下面我們不加証明地述説一些有关 Bessel 函数的必要知識。

我們称

$$J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\quad(\Re\nu>-1)\tag{21.1}$$

为ν次的 Bessel 函数,它是对所有的$x>0$定义的。

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,\quad J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

另外,成立着积分关系

$$J_\nu(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos xt\,dt\quad\left(\Re\nu<-\frac{1}{2}\right).\tag{21.2}$$

这个式子可以利用$\cos xt$的冪級数展开式来証明。由 (21.2) 使用一下余弦变換的反演公式,就得到$\left(\Re\nu>-\frac{1}{2}\right)$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}J_\nu(x)\cos xt\,dx&=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}},\ 0<t<1,\\&=0,\qquad\qquad t>1.\end{aligned}\right\}\tag{21.3}$$

另外, $J_\nu(x)$有下面的漸近展开式:

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\nu\pi\right)\left\{1-\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8x)^2}\cdots\right\}$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\nu\pi\right)\left\{\frac{4\nu^2-1^2}{1!8x}\right.$$
$$\left.-\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)}{3!(8x)^3}+\cdots\right\}\text{[1]}(\Re\nu>-1). \quad (21.4)$$

在这个展开式中,令 $x\to\infty$,则 $\sqrt{x}J_\nu(x)=O(1)$. 又按 $J_\nu(x)$ 的定义,当 $x\to 0$ 时,有 $J_\nu(x)=O(x^\nu)$,于是有

$$\sqrt{\pi}J_\nu(x)=O(1). \quad (21.5)$$

又由(21.1),有下面的公式

$$xJ'_\nu(x)=\nu J_\nu(x)-xJ_{\nu+1}(x), \quad (21.6)$$
$$xJ'_\nu(x)=-\nu J_\nu(x)+xJ_{\nu-1}(x), \quad (21.7)$$
$$2J'_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x),$$
$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x))=x^\nu J_{\nu-1}(x). \quad (21.8)$$

此外,还有

$$\int_0^\infty J_\nu(ax)J_{\nu+1}(x)dx=\begin{cases}a^\nu, & 0<a<1,\\ \frac{1}{2}, & a=1,\\ 0, & a>1.\end{cases} \quad (21.9)$$

現在設 $f(x)\in L_1(0,\infty)$,作下面的积分

$$H(t)=\int_0^\infty J_\nu(tx)\sqrt{tx}f(x)dx,\ t>0. \quad (21.10)$$

由(21.5),这个积分絕对收斂。$H(t)$ 叫做函数 $f(x)$ 的 ν 次 Hankel 变換。对于这个变換成立着下面的反演公式。

定理 21.1 設 $f(x)\in L_1(0,\infty)$,并且它在点 $x>0$ 的近傍是有界变分函数。設 $f(x)$ 的Hankel 变換是 $H(t)$,则

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}=\int_0^{\to\infty}H(t)J_\nu(xt)\sqrt{xt}\,dt,\quad \nu\geqslant-\frac{1}{2}. \quad (21.11)$$

[1] 参看 MacRobert, Spherical Harmonics, p. 274.

証明 由(21.6)及(21.11)容易导出下面的公式:

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\lambda\cdot\frac{xJ_{\nu+1}(\lambda x)J_\nu(\lambda y)-yJ_{\nu+1}(\lambda y)J_\nu(\lambda x)}{x^2-y^2}\right\}$$
$$=J_\nu(x\lambda)J_\nu(y\lambda)\lambda. \qquad (21.12)$$

設 δ 是相当小的正数。

$$\int_0^\lambda J_\nu(xt)\sqrt{xt}H(t)dt=\int_0^\lambda J_\nu(xt)\sqrt{xt}\,dt\int_0^\infty J_\nu(ty)\sqrt{ty}f(y)dy$$
$$=\int_0^\lambda J_\nu(xt)\sqrt{xt}\,dt\int_0^{x-\delta}J_\nu(ty)\sqrt{ty}f(y)dy$$
$$+\int_0^\lambda J_\nu(xt)\sqrt{xt}\,dt\int_{x-\delta}^{x+\delta}J_\nu(ty)\sqrt{ty}f(y)dy$$
$$+\int_0^\lambda J_\nu(xt)\sqrt{xt}\,dt\int_{x+\delta}^\infty J_\nu(ty)\sqrt{ty}f(y)dy$$
$$=I_1+I_2+I_3.$$

則

$$I_1=\sqrt{x}\int_0^{x-\delta}\sqrt{y}f(y)dy\int_0^\lambda J_\nu(xt)J_\nu(yt)tdt,$$

利用(21.12),就有

$$=\sqrt{x}\,\lambda\int_0^{x-\delta}\frac{xJ_{\nu+1}(\lambda x)J_\nu(\lambda y)-yJ_{\nu+1}(\lambda y)J_\nu(\lambda x)}{x^2-y^2}\sqrt{y}f(y)dy$$
$$=\sqrt{x}\,\lambda xJ_{\nu+1}(\lambda x)\int_0^{x-\delta}J_\nu(\lambda y)\frac{\sqrt{y}}{x^2-y^2}f(y)dy$$
$$-\sqrt{x}\,\lambda J_\nu(\lambda x)\int_0^{x-\delta}J_{\nu+1}(\lambda y)\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^2-y^2}f(y)dy$$
$$=J_1-J_2.$$

由(21.5),就有

$$J_1=O(\sqrt{\lambda})\int_0^{x-\delta}J_\nu(\lambda y)\frac{\sqrt{y}}{x^2-y^2}f(y)dy$$
$$=O(\sqrt{\lambda})\int_0^{1/\lambda}+O(\sqrt{\lambda})\int_{1/\lambda}^{x-\delta}. \qquad (21.13)$$

使用 $J_\nu(x)=O(x^\nu)$ 这个性质,第一項可写成

$$O(\sqrt{\lambda})\int_0^{1/\lambda} O(\lambda y)^{\nu}\cdot y^{1/2}|f(y)|dy$$

$$=O\left(\lambda^{\nu+1/2}\int_0^{1/\lambda} y^{\nu+1/2}|f(y)|dy\right)=O\left(\int_0^{1/\lambda}|f(y)|dy\right)$$

$$=o(1), \quad \lambda\to\infty. \tag{21.14}$$

其次令 $\lambda y\geqslant 1$，那么由(21.4)就能导出下式

$$J_\nu(\lambda y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{\lambda y}}\cos\left(\lambda y-\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\nu\pi\right)$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{\lambda y}}\sin\left(\lambda y-\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\nu\pi\right)+O\left(\frac{1}{(\lambda y)^{3/2}}\right)$$

$$=\frac{A\cos\lambda y+B\sin\lambda y}{\sqrt{\lambda y}}+O\left(\frac{1}{(\lambda y)^{3/2}}\right),$$

于是(21.13)的第二项成为

$$\int_{1/\lambda}^{x-\delta}(A\cos\lambda y+B\sin\lambda y)\ \frac{f(y)}{x^2-y^2}dy+O\left(\frac{1}{\lambda}\int_{1/\lambda}^{x-\delta}\frac{|f(y)|}{y}dy\right)$$

$$=O(1)\int_{1/\lambda}^{x-\delta}(A\cos\lambda y+B\sin\lambda y)\ \frac{f(y)}{x^2-y^2}dy$$

$$+O\left(\frac{1}{\lambda}\int_{1/\lambda}^{1/\lambda^{\frac{1}{2}}}\frac{|f(y)|}{y}dy\right)+O\left(\frac{1}{\lambda}\int_{1/\lambda^{\frac{1}{2}}}^{x-\delta}\frac{|f(y)|}{y}dy\right).$$

这里的第一项根据 Riemann-Lebesgue 定理，当 $\lambda\to\infty$ 时，收斂于零。而第二、三两項是

$$O\left(\int_0^{1/\lambda^{\frac{1}{2}}}|f(y)|dy\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}\int_0^{x-\delta}|f(y)|dy\right)=o(1).$$

再把这个結果及(21.14)代入到(21.13)内，則有

$$J_1\to 0\quad(\lambda\to\infty).$$

又对于 J_2 可以用同样的方法得到❶

$$J_2\to 0\quad(\lambda\to\infty).$$

于是有

$$I_1\to 0\quad(\lambda\to\infty). \tag{21.15}$$

其次考慮 I_3. 这个积分是

---

❶ 因为积分中 y 的乘幂較大，所以比(21.13)还簡单。

$$\sqrt{x}\int_{x+\delta}^{\infty}\sqrt{y}f(y)dy\int_0^{\lambda}J_\nu(xt)J_\nu(yt)t\,dt,$$

它和 I_1 完全一样，只不过现在 y 不能很小，所以比 I_1 的情形还要簡单些，因而能証明

$$I_3\to 0. \tag{21.16}$$

下面再考虑 I_2. 現在設 δ 相当小，于是 $f(x)$ 在 $[x-\delta, x+\delta]$ 中是有界变分的。从而 $y^{-\nu-1/2}f(y)$ 也是有界变分的。在 $(x, x+\delta)$ 中把它写成

$$y^{-\nu-1/2}f(y)=x^{-\nu-1/2}f(x+0)+\chi_1(y)-\chi_2(y),$$

这里 $\chi_1(y)$ 和 $\chi_2(y)$ 是正的增加函数，并且都比 ε 小。設

$$\begin{aligned}&\int_0^{\lambda}J_\nu(xt)\sqrt{xt}\,dt\int_x^{x+\delta}J_\nu(yt)\sqrt{yt}f(y)dy\\&=\sqrt{x}\int_0^{\lambda}J_\nu(xt)t\,dt\int_x^{x+\delta}J_\nu(yt)y^{\nu+1}\{x^{-\nu-1/2}f(x+0)\\&\quad+\chi_1(y)-\chi_2(y)\}\,dy\\&=x^{-\nu}f(x+0)\int_0^{\lambda}J_\nu(xt)t\,dt\int_x^{x+\delta}J_\nu(yt)y^{\nu+1}dy\\&\quad+\sqrt{x}\int_0^{\lambda}J_\nu(xt)t\,dt\int_x^{x+\delta}J_\nu(yt)y^{\nu+1}\chi_1(y)dy\\&\quad-\sqrt{x}\int_0^{\lambda}J_\nu(xt)t\,dt\int_x^{x+\delta}J_\nu(yt)y^{\nu+1}\chi_2(y)dy\\&=K_1+K_2+K_3.\end{aligned}$$

由于(21.8)，就有

$$\begin{aligned}K_1=x^{-\nu}f(x+0)\int_0^{\lambda}J_\nu(xt)\,[J_{\nu+1}\{(x+1)t\}(x+\delta)^{\nu+1}\\-J_{\nu+1}(xt)x^{\nu+1}]\,dt.\end{aligned}$$

在这里利用(21.9)，当 $\lambda\to\infty$, $\delta\to 0$ 时，就得到

$$K_1\to x^{-\nu}f(x+0)\left(x^{\nu}-\frac{1}{2}x^{\nu}\right)=\frac{1}{2}f(x+0). \tag{21.17}$$

对 $$K_2=\sqrt{x}\int_x^{x+\delta}\chi_1(y)y^{\nu+1}dy\int_0^{\lambda}J_\nu(xt)J_\nu(yt)t\,dt,$$

由第二中值定理，

$$= \sqrt{x}\,\chi_1(x+\delta)\int_{\xi}^{x+\delta} y^{\nu+1}dy\int_0^{\lambda} J_\nu(xt)J_\nu(yt)t\,dt,$$

$$= \sqrt{x}\,\chi_1(x+\delta)\int_0^{\lambda} J_\nu(xt)t\,dt\int_{\xi}^{x+\delta} y^{\nu+1}J_\nu(yt)\,dy, \quad x<\xi<x+\delta,$$

利用(21.8)，求出里面的积分，就得到

$$= \sqrt{x}\,\chi_1(x+\delta)\int_0^{\lambda} J_\nu(xt)\left[(x+\delta)^{\nu+1}J_{\nu+1}\{(x+\delta)t\} - \xi^{\nu+1}J_{\nu+1}(\xi t)\right]dt.$$

这个积分是有界的。因为使用(21.4)能够导出下面的結果

$$\int_0^{\lambda} J_\nu(xt)J_{\nu+1}(t)\,dt = \int_0^1 + \int_1^{\lambda}$$

$$= O(1) + \int_1^{\lambda} \frac{2}{\pi\sqrt{x}}\,\frac{1}{t}\cos\left(xt-\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\nu\pi\right) \times\cos\left(t-\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\nu\pi\right)dt + O(1),$$

右边中間的积分不難应用 §7 中的方法証明它是有界的。

因为 $\chi_1(x+\delta)\leqslant\varepsilon$（根据假設），所以 K_2 可以小于任意已給的数。关于 K_3 能得同样的結果。于是由(21.17)就有

$$\int_0^{\lambda} J_\nu(xt)\sqrt{xt}\,dt\int_x^{x+\delta} J_\nu(yt)\sqrt{yt}\,f(y)\,dy \to \frac{1}{2}f(x+0).$$

同样地能够得到

$$\int_0^{\lambda} J_\nu(xt)\sqrt{xt}\,dt\int_{x-\delta}^{x} J_\nu(yt)\sqrt{yt}\,f(y)\,dy \to \frac{1}{2}f(x-0),$$

这样就証明了

$$I_2 \to \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

証毕

§22 Hankel 变换与多变数函数的 Fourier 变换

設 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 是定义在 k 維空間 R_k 的函数，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \cdots, x_k)|\,dx_1\cdots dx_k < \infty,$$

令 $F(t_1, t_2, \cdots, t_k)$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1, \cdots, x_k)e^{-i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}dx_1\cdots dx_k, \tag{22.1}$$

则 $F(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ 叫做 $f(x_1, \cdots, x_k)$ 的 Fourier 变换。

現在我們特别考虑 $f(x_1, \cdots, x_k)$ 是 $r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}$ 的函数的情形。

写出它的 Fourier 变换，即

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_k)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k/2}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(r)e^{i(t\cdot x)}dx_1\cdots dx_k.$$

这里 $t\cdot x=t_1x_1+\cdots+t_kx_k$. 現在令

$$\tau^2=t_1^2+t_2^2+\cdots+t_k^2,$$

再令
$$t_i=\tau\alpha_i,\quad i=1, 2, \cdots, k.$$

对 x 施以下面的变换

$$y_1=\sum_{i=1}^{k}\alpha_ix_i,$$

$$y_j=\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ij}x_i,\quad j=2, 3, \cdots, k.$$

这里的 α_{ij} 是使得这个变换成为正交变换的系数。于是

$$r^2=\sum_{i=1}^{k}x_i^2=\sum_{i=1}^{k}y_i^2,$$

并且
$$dx_1dx_2\cdots dx_k=dy_1dy_2\cdots dy_k,$$

$$t\cdot x=\sum_{i=1}^{k}t_ix_i=\tau\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i=\tau y_1.$$

这样就能把 Fourier 变换写成下面的形状

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_k)$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k/2}\int_{-\infty}^{\infty}dy_1e^{i\tau y_1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_k^2})dy_2\cdots dy_k$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau y_1}dy_1\int_0^{\infty}f(\sqrt{y_1^2+\lambda^2})\Omega(\lambda)d\lambda. \tag{22.2}$$

这就是把 $y_2, \cdots, y_k$ 化成 $(k-1)$ 維极坐标的写法，其中 $\Omega(\lambda)$ 是

$(k-1)$維球的体积，λ 是球的半徑。即

$$\Omega=\omega\cdot\lambda^{k-2}.$$

其中 ω 仅与 k 有关而与 λ 无关。由于对于任意的 Φ 成立着

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\sqrt{y_2^2+\cdots+y_k^2})dy_2\cdots dy_k=\int_0^{\infty}\Phi(\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda, \tag{22.3}$$

可特別取 $\Phi=e^{-\lambda^2}$ 而来决定函数 $\Omega(\lambda)$. 对于这样的 Φ, (22.3) 的左边成为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y_2^2+\cdots+y_k^2)}dy_2\cdots dy_k=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy\right)^{k-1}.$$

而其右边是

$$\omega\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2}\lambda^{k-2}d\lambda.$$

由于 $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi},\quad \int_0^{\infty}\lambda^{k-2}e^{-\lambda^2}d\lambda=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right),$$

所以 $$(\sqrt{\pi})^{k-1}=\omega\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right),$$

这样就有

$$\omega=\frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}.$$

把它代入到(22.2)内，就有

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_k)=\frac{1}{2^{k/2-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau y_1}dy_1\int_0^{\infty}f(\sqrt{y_1^2+\lambda^2})\lambda^{k-2}d\lambda.$$

在这里令 $\lambda=r\sin\phi$, $y_1=r\cos\phi$, 則有

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_k)=\frac{1}{2^{k/2-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}r^{k-1}f(r)dr\int_0^{\pi}\sin^{k-2}\phi\, e^{i\tau r\cos\phi}d\phi. \tag{22.4}$$

但是如果在(21.2)中設 $t=\cos\phi$, $\nu=\frac{k-2}{2}$, 則有

$$J_{(k-2)/2}(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{(k-2)/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}\phi\cos(x\cos\phi)d\phi$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{(k-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\sin^{k-2}\phi\cos(x\cos\phi)d\phi$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{(k-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\sin^{k-2}\phi\cdot e^{ix\cos\phi}d\phi,$$

$\left(\sin^{k-2}\phi\sin(x\cos\phi)\right.$ 是 ψ 的奇函数, $\left.\psi=\phi-\frac{\pi}{2}\right)$. 于是

$$\int_0^{\pi}\sin^{k-2}\phi e^{i\tau r\cos\phi}d\phi=\frac{2^{\frac{1}{2}k-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)}{(\tau r)^{\frac{k}{2}-1}}J_{\frac{k}{2}-1}(\tau r). \tag{22.5}$$

把这个公式代入到(22.4)之内,就得到了

$$F(t_1,\cdots,t_k)=\frac{1}{\tau^{\frac{k}{2}-1}}\int_0^{\infty}r\left(r^{\frac{k}{2}-1}f(r)\right)J_{\frac{k}{2}-1}(\tau r)dr.$$

这就是說, Fourier 变换 $F(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ 現在成了仅仅与 τ 有关的函数 $F(\tau)$, 並且

$$\tau^{\frac{k}{2}-1}F(\tau)=\int_0^{\infty}r\left(r^{\frac{k}{2}-1}f(r)\right)J_{\frac{k}{2}-1}(\tau r)dr. \tag{22.6}$$

这样就得到了下面的定理。

定理 設 $f(x_1, \cdots, x_k)$ 是 k 維空間 R_k 中的可积函数, 如果它仅是 r 的函数, $r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}$, 那么它的 Fourier 变换 $F(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ 就成为仅依賴于 τ 的函数 $F(\tau)$,

$$\tau=\sqrt{t_1^2+t_2^2+\cdots+t_k^2}.$$

並且 $\tau^{\frac{k}{2}-1}F(\tau)$ 是 $r^{\frac{k}{2}-1}f(r)$的 $\left(\frac{k}{2}-1\right)$次的 Hankel 变换。

故此在 k 維空間中仅依賴于到原点距离的函数的 Fourier 变换，能够归結为一个变量的 Hankel 变换。这样，由对于 k 个变量的函数的 Fourier 变换成立的定理，就能够导出关于 Hankel 变换的定理。

第5章　Laplace 变换

§23 Laplace 变换

下面我們約定 $\alpha(t)$ 是定义在 $0\leqslant t<\infty$ 中的函数，并且在任意的有限区間 $[0, t]$ 中是有界变分函数。$\alpha(t)$ 也可能是具有复数値的函数，不过这里我們考虑它仅具有实数函数值。作积分

$$\int_0^R e^{-st}d\alpha(t),$$

其中 $s=\sigma+i\tau$. 如果积分

$$f(s)=\int_0^{\to\infty} e^{-st}d\alpha(t)=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}d\alpha(t) \tag{23.1}$$

对于已給的一些 s 存在的話，把 $f(s)$ 看成 s 的函数，它就叫做 $\alpha(t)$ 的 Laplace-Stieltjes 变换。此外，如果对于定义在 $0\leqslant t<\infty$ 中的函数 $\varphi(t)$,

$$f(s)=\int_0^{\to\infty} e^{-st}\varphi(t)dt \tag{23.2}$$

存在的話，$f(s)$ 就叫做 $\varphi(t)$ 的 Laplace 变换。下面我們用写法 $\int_0^{\infty} e^{-st}d\alpha(t)$ 代替写法 $\int_0^{\to\infty} e^{-st}d\alpha(t)$.

定理 23.1　設对于某一个 $s_0=\sigma_0+i\tau_0$, 成立估計式

$$\left|\int_0^u e^{-s_0t}d\alpha(t)\right|\leqslant M, \tag{23.3}$$

那么对于所有的 $s=\sigma+i\tau$, $\sigma>\sigma_0$, (23.1)恒存在，但假設 M 是与 u 无关的常数。因此

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,d\alpha(t)=(s-s_0)\int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t}\beta(t)\,dt. \tag{23.4}$$

这里

$$\beta(u)=\int_0^u e^{-s_0 t}\,d\alpha(t). \tag{23.5}$$

(23.4)右边的积分是絕对收斂的。

証明　$\beta(u)$ 由(23.5)所定义。于是有

$$\int_0^R e^{-st}\,d\alpha(t)=\int_0^R e^{-(s-s_0)t}d\beta(t)$$

$$=e^{-(s-s_0)R}\beta(R)+(s-s_0)\int_0^R e^{-(s-s_0)t}\beta(t)\,dt. \tag{23.6}$$

由于 $|e^{-(s-s_0)R}|=e^{-(\sigma-\sigma_0)R}$，所以当 $R\to\infty$ 时，$e^{-(s-s_0)R}\to 0$. 又因为 $|\beta(R)|<M$，所以(23.6)中的第一項收斂于零。同样由(23.3)，$|\beta(t)|<M$，所以

$$\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\beta(t)\,dt$$

絕对收斂。于是在(23.6)中令 $R\to\infty$，就得到(23.4)。　　証毕

特別有下面的定理。

定理 23.2　如果 $f(s)=\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$ 对于 $s=\sigma_0+i\tau_0$ 收斂，則它对于一切的 $s=\sigma+i\tau$ 收斂，只要 $\sigma>\sigma_0$.

根据这个事实，如果(23.1)对于某一个 $s=s_0$ 发散，那么它对于一切的 $s=\sigma+i\tau$ 发散，只要 $\sigma<\sigma_0$. 因为假如(23.1)对某一个满足 $\sigma<\sigma_0$ 的 s 收斂，那么根据定理 23.2，(23.1)应該对于 $s=s_0$ 收斂而导出矛盾。所以关于积分的收斂情形只有下面三种可能性：

(i) $f(s)$ 对于所有的 s 都是发散的。

(ii) $f(s)$ 对于所有的 s 都是收斂的。

(iii) 存在着这样的 σ_0，使得 $f(s)$ 对于 $\Re s>\sigma_0$ 收斂，对于 $\Re s<\sigma_0$

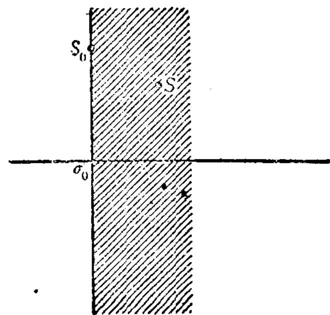


图　23.1

发散。

这三种情形实际上都可能出現。例如設

$$\alpha(t)=\int_0^t \exp(e^u)\,du,$$

则
$$\int_0^R e^{-st}d\alpha(t)=\int_0^R e^{-st}e^{e^t}dt. \tag{23.7}$$

現在令
$$I_n=\int_{\log n}^{\log(n+1)} e^{-st}e^{e^t}dt$$
$$=\int_{e^n}^{e^{n+1}} (\log u)^{-(s+1)}du \quad (令\ u=e^{e^t}).$$

假設(23.7)对某一个 s_0 收斂(当 $R\to\infty$ 时)，那么对于 $\sigma_1>\Re s_0$ 也收斂。从而当 $s=\sigma_1$ 时 $I_n\to 0$. 但是实际上当 $s=\sigma_1$ 时，

$$I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}} (\log u)^{-(\sigma+1)}du>(n+1)^{-(\sigma+1)}\cdot(e^{n+1}-e^n)$$
$$=(n+1)^{-(\sigma+1)}e^n(e-1)\to\infty \quad (n\to\infty).$$

因此(23.7)对于一切的 s 当 $R\to\infty$ 时都是发散的。这样就說明实际存在着(i)的情形。

其次設

$$\alpha(t)=\int_0^\infty \exp(-e^u)\,du,$$

則有
$$\int_R^{R'} e^{-st}d\alpha(t)=\int_R^{R'} e^{-st}e^{-t}dt,$$

所以
$$\left|\int_R^{R'} e^{-st}d\alpha(t)\right|\leqslant\int_R^{R'} e^{-\sigma t-e^t}dt \quad (s=\sigma+it).$$

又存在着这样的 R_0，如 $t>R_0$，成立 $-\sigma t-e^t<-\frac{1}{2}e^t$. 于是取 $R'>R>R_0$，并且 $\frac{1}{2}e^t>t\,(t>R_0)$，就得到

$$\int_R^{R'} e^{-\sigma t-e^t}dt\leqslant\int_R^{R'} e^{-\frac{1}{2}e^t}dt<\int_R^{R'} e^{-t}dt\to 0 \quad (R',\ R\to\infty).$$

于是在这种情形中对于一切的 s，总存在着 $\alpha(t)$ 的 Laplace-Stieltjes 变换。

故此实际能出現(ii)的情形。

設 $\alpha(t)=t$，則

$$\int_0^R e^{-st}d\alpha(t)=\int_0^R e^{-st}dt=\frac{e^{-sR}-1}{-s}.$$

于是当 $R\to\infty$ 时，如果 $\Re s>0$，則积分收斂；如果 $\Re s<0$，則积分发散。这是属于情形(iii)的例。

如果 $\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$ 当 $\Re s>\sigma_0$ 时收斂，当 $\Re s<\sigma_0$ 时发散，那么 σ_0 就叫做 Laplace-Stieltjes 变换的**收斂坐标**。在(i)的情形 $\sigma_0=\infty$，在(ii)的情形 $\sigma_0=-\infty$。

但是当 $\sigma=\sigma_0$ 时，Laplace-Stieltjes 变换也可能存在，也可能不存在。

設 $\alpha(t)=t$，这时 $\sigma_0=0$，但是 $\int_0^R e^{-i\tau t}dt$ 当 $R\to\infty$ 时并不收斂。

又 $\alpha(t)=\int_0^t \frac{dt}{1+t^2}$ 时，$\sigma_0=0$（这很容易証明），而因

$$\left|\int_R^{R'} e^{-i\tau t}\frac{dt}{1+t^2}\right|\leqslant\int_R^{R'}\frac{dt}{1+t^2}\to 0 \quad (R,\ R'\to\infty),$$

所以对于一切的 $s=i\tau$，Laplace-Stieltjes 变换一定是收斂的。

§24 收斂坐标

令 $\quad \alpha(t)=a_n,\ n\leqslant t<n+1,\ n=0,1,2,\cdots$，則

$$\int_0^{N+1/2} e^{-st}d\alpha(t)=a_0+a_1e^{-s}+a_2e^{-2s}+\cdots+a_Ne^{-Ns}.$$

于是积分 $\lim\limits_{N\to\infty}\int_0^{N+1/2} e^{-st}d\alpha(t)$ 的收斂与否和

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}$$

的收斂与否是一致的。令 $e^{-s}=e^{-\sigma}e^{-i\tau}=re^{-i\tau}=z$，則上面的級数化成了冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{24.1}$$

所以 Laplace 积分 (Laplace-Stieltjes 变换)可以看作是幂級数的推广。更一般地还可以看作是 Dirichlet 級数

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

的推广(只要令 $\alpha(t)=a_n$, 当 $\lambda_n \leqslant t < \lambda_{n+1}$ 时)。如令(24.1)的收斂半徑为 ρ, 則 $\rho^{-1}=\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. 因此可以同样地来考虑 Laplace 积分的收斂坐标。現在先証明下面的定理。

定理 24.1 設对某一个实数 γ, 有 $\alpha(t)=O(e^{\gamma t})$, 则积分

$$\int_0^\infty e^{-st}\,d\alpha(t) \tag{24.2}$$

当 $\Re s>\gamma$ 时收斂。

証明 根据假設,存在着定数 M, 使得 $|\alpha(t)|\leqslant Me^{\gamma t}, 0\leqslant t<\infty$. 于是有

$$\int_0^R e^{-st}d\alpha(t)=\alpha(R)e^{-sR}-\alpha(0)+s\int_0^R e^{-st}\alpha(t)\,dt.$$

但是
$$|\alpha(R)e^{-sR}|\leqslant Me^{\gamma R}\cdot e^{-\sigma R} \quad (\sigma=\Re s),$$
$$\to 0 \qquad (R\to\infty).$$

又
$$\int_R^{R'} e^{-\sigma t}|\alpha(t)|\,dt\leqslant M\int_R^{R'} e^{-(\sigma-\gamma)t}dt$$
$$=\frac{M\left(e^{-(\sigma-\gamma)R'}-e^{-(\sigma-\gamma)R}\right)}{R-\sigma}$$
$$\to 0 \quad (R'\to\infty,\ R\to\infty).$$

因此积分 $\int_0^\infty e^{-st}\alpha(t)\,dt$ 絕对收斂,于是积分 $\int_0^{\to\infty} e^{-st}d\alpha(t)$ 收斂。

証毕

相当于上面定理的逆定理的是下面的定理。

定理 24.2 如果积分

$$\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$$

当 $s=s_0=\sigma_0+i\tau_0(\sigma_0>0)$ 时收斂,則

$$\alpha(t)=o(e^{\sigma_0 t}).$$

証明 設

$$\beta(t)=\int_0^t e^{-s_0u}d\alpha(u),$$

則
$$\alpha(t)-\alpha(0)=\int_0^t d\alpha(t)=\int_0^t e^{s_0u}d\beta(u)$$

$$=\beta(t)e^{s_0t}-s_0\int_0^t e^{s_0u}\beta(u)du,$$

于是

$$\lim_{t\to\infty}(\alpha(t)-\alpha(0))e^{-s_0t}=\beta(\infty)-\lim_{t\to\infty}s_0e^{-s_0t}\int_0^t e^{s_0u}\beta(u)du$$

$$=\lim_{t\to\infty}s_0e^{-s_0t}\int_0^t e^{s_0u}(\beta(\infty)-\beta(u))du. \quad (24.3)$$

但是

$$\left|e^{-s_0t}\int_0^\tau e^{s_0u}(\beta(\infty)-\beta(u))du\right|=e^{-\sigma_0t}\int_0^t e^{\sigma_0u}\sigma(1)du=o(1).$$

把它代入 (24.3) 就有 $\alpha(t)-\alpha(0)=o(e^{\sigma_0t})$. 因为当 $\sigma_0>0$ 时, $e^{\sigma_0t}\to\infty\ (t\to\infty)$, 所以 $\alpha(t)=o(e^{\sigma_0t})$. 証毕

定理 24.3 設积分 $\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$ 当 $s=s_0=\sigma_0+i\tau_0$ 时收斂,此处 $\sigma_0<0$, 則 $\alpha(\infty)$ 存在,并且 $\alpha(t)-\alpha(\infty)=o(e^{\sigma_0t})$.

証明 因为 $\sigma_0<0$, 所以 $s=0$ 时 Laplace 积分收斂, 因此 $\alpha(\infty)$ 存在。于是

$$\alpha(\infty)-\alpha(t)=\int_t^\infty d\alpha(u)=\int_t^\infty e^{s_0u}d\beta(u),$$

这里 $\beta(u)=\int_0^t e^{-s_0u}d\alpha(u)$. 施行分部积分后,得到

$$\alpha(\infty)-\alpha(t)=\Big[e^{s_0u}\beta(u)\Big]_t^\infty-s_0\int_t^\infty e^{s_0u}\beta(u)du,$$

因为 $\Re s_0<0$, 所以 $\lim_{t\to\infty}e^{s_0t}\beta(t)=0$, 于是

$$=-e^{s_0t}\beta(t)-s_0\int_t^\infty e^{s_0u}\beta(u)du.$$

即 $$\lim_{t\to\infty}[\alpha(\infty)-\alpha(t)]e^{-s_0t}=-\beta(\infty)-\lim_{t\to\infty}s_0\int_t^\infty e^{s_0u}\beta(u)du$$

$$=\lim_{t\to\infty} s_0 e^{-s_0 t}\int_t^{\infty} e^{s_0 u}[\beta(\infty)-\beta(u)]du.$$

但是

$$e^{-s_0 t}\int_t^{\infty} e^{s_0 u}[\beta(\infty)-\beta(u)]du=e^{-s_0 t}\int_t^{\infty} o(e^{\sigma_0 u})du=o(1).$$ 証毕

下面考虑 Laplace 积分的收斂坐标。

定理 24.4 如果

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log|\alpha(t)|}{t}=\lambda\neq 0, \tag{24.4}$$

则 $\alpha(t)$ 的 Laplace 积分 $\int_0^{\infty} e^{-st}d\alpha(t)$ 的收斂坐标 σ_0 等于 λ.

証明 (i) 当 $\lambda>0$ 时，我們先証明积分 $\int_0^{\infty} e^{-st}d\alpha(t)$ 对于 $\Re s>\lambda$ 是收斂的。根据假設(24.4)有

$$\alpha(t)=O(e^{(\lambda+\varepsilon)t}),\quad \varepsilon>0.$$

所以由定理 24.1, Laplace 积分当 $\Re s>\lambda$ 时收斂。其次再証明积分当 $\Re s<\lambda$ 时发散。若是对某一个 σ，积分收斂，我們可以假設 $0<\sigma<\lambda$. 根据定理 24.2 有

$$\alpha(t)=o(e^{\sigma t}).$$

于是存在着满足 $|\alpha(t)|\leqslant Me^{\sigma t}$ 的定数 M. 从而

$$\log|\alpha(t)|\leqslant\log(Me^{\sigma t})=\log M+\sigma t.$$

即

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log|\alpha(t)|}{t}\leqslant\sigma<\lambda.$$

这与假設(24.4)矛盾。

(ii) 当 $\lambda<0$ 时，用(i)中同样的証法，能說明 Laplace 积分当 $\sigma>\lambda$ 时收斂。假設对某一个 $\sigma<\lambda$，积分收斂，则根据定理 24.3，有 $\alpha(t)-\alpha(\infty)=o(e^{\sigma_0 t})$. 由(24.4)，因为 $\lambda<0$，而有 $\log|\alpha(t)|\to-\infty$，即 $\alpha(\infty)=0$，于是有

$$\alpha(t)=o(e^{\sigma t}).$$

这样就有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log|\alpha(t)|}{t}\leqslant\sigma<\lambda.$$

而这也与假設(24.4)矛盾。 証毕

下面再述說一下当 $\lambda=\pm\infty$ 时的情形。

定理 24.5 若是

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log|\alpha(t)|}{t}=+\infty(-\infty),$$

则 $\alpha(t)$ 的 Laplace 积分的收斂坐标是 $\infty(-\infty)$.

这个定理明显地是定理 24.4 的特殊情形。

定理 24.6 設 $\limsup_{t\to\infty}\frac{\log|\alpha(t)|}{t}=0$,并且当 $t\to\infty$ 时,$\alpha(t)$ 不收斂于一定的极限值,那么收斂坐标必等于零。

証明 当 $\Re s>0$ 时,积分 $\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$ 的收斂性可以象定理 24.4 中那样地来証明。又如 $s=0$, Laplace 积分成为 $\int_0^\infty d\alpha(t)$, 因假定了 $\alpha(t)$ 不收斂,所以这积分也不收斂,即收斂坐标是零。証毕

如果不假設 $\alpha(t)$ 不收斂的条件,那么这个定理就可能不成立。譬如取 $\alpha(t)=1-e^{-t}$, 定理 24.6 中的第一个条件就满足了,但是收斂坐标为 -1.

另外还有下面的定理。

定理 24.7 若是 $\alpha(t)$ 的 Laplace 积分具有非負的收斂坐标 σ_0, 则

$$\sigma_0=\limsup_{t\to\infty}\frac{\log|\alpha(t)|}{t}. \tag{24.5}$$

証明 假設 $\sigma_0=0$. 如果 (24.5) 中的 lim sup 是与 0 不同的数,那么这就与定理 24.4 矛盾,所以应該得到 (24.5)。

其次設 $\sigma_0>0$, 并且 (24.5) 中的 lim sup 不等于零, 但与 σ_0 不同, 則这个值根据定理 24.4 应該是收斂坐标, 这又导出矛盾。又如果 $\sigma_0>0$, 而 (24.5) 中 $\limsup=0$ 的話, 則根据定理 24.6, 这时的收斂坐标应該 $\leqslant 0$, 这也与 $\sigma_0>0$ 矛盾。 証毕

比較完整地述說收斂坐标的是下面的定理❶。

---

❶ 参看 T. Ugaheri: On the abscissa of convergence of Laplace-Stieltjes integral, Ann. Institute Statistical Math., **2** (1950).

定理 24.8 积分

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,d\alpha(t) \tag{24.6}$$

的收斂坐标 σ_0 能够表达为

$$\sigma_0 = \limsup_{t\to\infty} \frac{\log\left|\int_{(t)}^{t} d\alpha(t)\right|}{t}, \tag{24.7}$$

其中的 (t) 是满足关系 $t-1\leqslant(t)<t$ 的整数。

証明 若是 (24.6) 对 $s=s_1=\sigma_1+i\tau_1$ 收斂，那么它对 $s=\sigma\,(\sigma>\sigma_1)$ 也收斂。令

$$\beta(t)=\int_0^t e^{-\sigma u}\,d\alpha(u),$$

那末存在着这样的常数 M，使得 $|\beta(t)|\leqslant M$. 于是

$$\begin{aligned}\int_{(t)}^{t} d\alpha(u) &= \int_{(t)}^{t} e^{\sigma u}\,d\beta(u)\\ &= \beta(t)e^{\sigma t}-\beta((t))e^{\sigma\cdot(t)}-\sigma\int_{(t)}^{t} e^{\sigma u}\beta(u)\,du.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_{(t)}^{t} d\alpha(u)\right| &\leqslant M(e^{\sigma t}+e^{\sigma\cdot(t)})+|\sigma|M\int_{(t)}^{t} e^{\sigma u}\,du\\ &= M(e^{\sigma t}+e^{\sigma\cdot(t)})+M|e^{\sigma t}-e^{\sigma\cdot(t)}|.\end{aligned}$$

故

$$\left|\int_{(t)}^{t} d\alpha(u)\right| \leqslant \begin{cases} 3Me^{\sigma t}, & \sigma\geqslant 0,\\ 3Me^{\sigma\cdot(t)}, & \sigma<0.\end{cases}$$

于是

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log\left|\int_{(t)}^{t} d\alpha(u)\right|}{t} \leqslant \sigma.$$

因此

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log\left|\int_{(t)}^{t} d\alpha(u)\right|}{t} \leqslant \sigma_1. \tag{24.8}$$

故当积分的收斂坐标是 σ_0 时，有

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log\left|\int_{(t)}^{t} d\alpha(u)\right|}{t} \leqslant \sigma_0. \tag{24.9}$$

下面我們証明和 (24.9) 相逆的不等式。为了这个目的，令 (24.8) 的左边为 λ，并取一个比 λ 大的数 σ，則只要証明对于 $s=\sigma+i\tau$ 积分(24.6)收斂就够了。現在假設 λ 是有限的。对于任意給定的 $\varepsilon>0$，有这样的 T 存在，使得

$$\left|\int_{(t)}^{t} d\alpha(t)\right| \leqslant e^{(\lambda+\varepsilon)t}, \quad t>T>0. \qquad (24.10)$$

把 ε 选得相当小，使得 $\lambda+2\varepsilon<\sigma$。于是只要指出 (24.6) 对于 $\lambda+2\varepsilon$ 是收斂的就够了。

設 n 是正整数，令 $t=n+\tau$，$0\leqslant\tau\leqslant1$。并設

$$\gamma_n(t)=\int_n^t d\alpha(u).$$

于是
$$\int_n^{n+\tau} e^{-(\lambda+2\varepsilon)t} d\alpha(t)=\gamma_n(n+\tau)e^{-(\lambda+2\varepsilon)(n+\tau)} + (\lambda+2\varepsilon)\int_n^{n+\tau} e^{-(\lambda+2\varepsilon)t}\gamma_n(t)\,dt.$$

因为根据(24.10)有 $|\gamma_n(t)|\leqslant e^{(\lambda+\varepsilon)t}$，所以

$$\begin{aligned}\left|\int_n^{n+\tau} e^{-(\lambda+2\varepsilon)t} d\alpha(t)\right| &\leqslant e^{-\varepsilon(n+\tau)}+(\lambda+2\varepsilon)\int_n^{n+\tau} e^{-\varepsilon t}\,dt\\ &\leqslant e^{-\varepsilon n}+(\lambda+\varepsilon)\tau\cdot\frac{1-e^{-\varepsilon\tau}}{\varepsilon\tau}\,e^{-\varepsilon n}\\ &< e^{-\varepsilon n}(1+(\lambda+\varepsilon))\equiv e^{-\varepsilon n}\cdot K. \qquad (24.11)\end{aligned}$$

令 $(t_1)=l$，$(t_2)=l+m$，$(m>0)$，則

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-(\lambda+2\varepsilon)t} d\alpha(t)=\int_l^{l+m}+\int_{l+m}^{t_2}-\int_l^{t_1}.$$

于是

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-(\lambda+2\varepsilon)t} d\alpha(t)\right| \leqslant \left|\int_l^{t_1}\right|+\left|\int_{l+m}^{t_2}\right|+\sum_{p=0}^{m-1}\left|\int_{l+p}^{l+p+1}\right|.$$

由(24.11)就有

$$\begin{aligned}&\leqslant Ke^{-\varepsilon l}+Ke^{-\varepsilon(l+m)}+K\sum_{p=0}^{m-1}e^{-\varepsilon(l+p)}\\ &\leqslant e^{-\varepsilon l}\frac{3K}{1-e^{-\varepsilon}}.\end{aligned}$$

因为当 $t_2, t_1 \to \infty$ 时，$l \to \infty$，所以积分收敛于零。故此积分(24.6)当 $\sigma=\lambda+2\varepsilon$ 时收敛。

当 $\lambda=\infty$，或 $\lambda=-\infty$ 时，也可以同样地証明。于是

$$\sigma_0 \geqslant \lambda.$$

把它和(24.9)比較，就得到

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log\left|\int_{(t)}^{t} d\alpha(u)\right|}{t}=\sigma_0.$$

証毕

§25　Laplace 变换的正則性

定理 25.1　若是

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,d\alpha(t) \tag{25.1}$$

对于 $s=s_0=\sigma_0+i\tau_0$ 收斂，則在范圍

$$|s-s_0| \leqslant K(\sigma-\sigma_0) \quad (\Re s=\sigma) \tag{25.2}$$

中，积分一致收斂。这里 K 是大于 1 的正数。

証明　把(25.2)所确定的范圍用△表示。在下面的图内，△就是有阴影的那个角的范圍。角的两边关于过角的頂点的水平綫对称，每边和水平綫作成角 θ_0，$\frac{1}{K}=\cos\theta_0\left(0<\theta_0<\frac{\pi}{2}\right)$，在范圍内的点与頂点的連綫对水平綫作成角 θ，$\theta<\theta_0$。根据定理 23.2，积分 (25.1) 在 △ 的內部收斂。

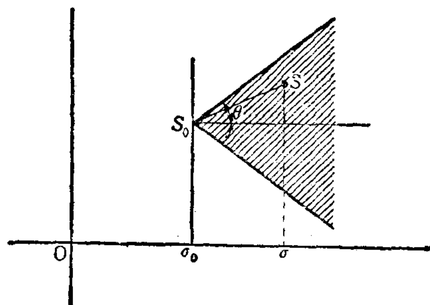


图　25.1

設 ε 是任意已給的正数。要証明定理，只要証明存在一个仅与 K 有关，而与△中的 s 无关的常数 R_0，使得当 $s\in\triangle$，$R\geqslant R_0$ 时，

$$\left|\int_R^{\infty} e^{-st}\,d\alpha(t)\right| \leqslant \varepsilon \tag{25.3}$$

卽可。令
$$\beta(t)=\int_0^t e^{-s_0 u}\,d\alpha(u).$$

取这样的 R_0，使得当 $t, t' \geqslant R_0$ 时，

$$|\beta(t)-\beta(t')| < \frac{\varepsilon}{K}. \tag{25.4}$$

于是当 $R \geqslant R_0$ 时，$\int_R^{\infty} e^{-st}\,d\alpha(t)=\int_R^{\infty} e^{-(s-s_0)t}\,d\beta(t)$

$$=\int_R^{\infty} e^{-(s-s_0)t}\,d[\beta(t)-\beta(R)]$$

$$=(s-s_0)\int_R^{\infty} e^{-(s-s_0)t}[\beta(t)-\beta(R)]\,dt.$$

这样，由(25.4)就有

$$\left|\int_R^{\infty} e^{-st}\,d\alpha(t)\right| \leqslant |s-s_0|\cdot\frac{\varepsilon}{K}\int_R^{\infty} e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\,dt$$

$$=\frac{\varepsilon}{K}\cdot\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0},$$

$$\leqslant \varepsilon.\ (\text{由于}(25.2))$$

这就証明了(25.3)。 証毕

由定理 25.1 能够得到下面的定理。

定理 25.2

$$f(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\,d\alpha(t) \tag{25.5}$$

在半平面 $\Re s > \sigma_0$（σ_0 是收斂坐标）中正則，并且成立着公式

$$f^{(p)}(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}(-t)^p\,d\alpha(t). \tag{25.6}$$

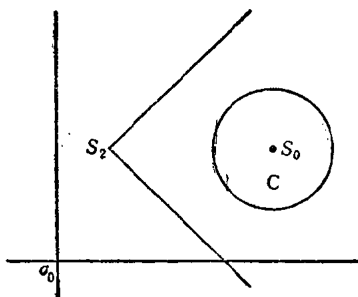


图 25.2

証明 設 s_0 是屬于 $\Re s > \sigma_0$ 的任意点。因为对于滿足 $\Re s_0$

$>\Re s>\sigma_0$ 的 s, $f(s)$ 是存在的，所以可在这个范圍内取一个 s_2，以 s_2 为頂点作成角范圍 $\triangle$，包含 s_0 于其中。由于定理 25.1, (25.5) 的积分在这角范圍中一致收斂。于是

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-st}\,d\alpha(t)$$

也在$\triangle$中一致收斂，因此这个积分在以 s_0 为中心而完全包含在$\triangle$内的圓 C 中也一致收斂。

現在对于固定的 n，研究一下积分

$$\int_n^{n+1} e^{-st}\,d\alpha(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-s)^{\nu}}{\nu!}\int_n^{n+1} t^{\nu}d\alpha(t). \tag{25.7}$$

由于

$$\left|\int_n^{n+1} t^{\nu}d\alpha(t)\right|\leqslant(n+1)^{\nu}\int_n^{n+1}|d\alpha(t)|,$$

再由于指数函数級数的一致收斂性，所以上面的級数在 C 中一致收斂。因为級数的各項都是 s 的正則函数，故此(25.7)在 C 中正則。另外根据 Weierstrass 逐項微分定理，成立着

$$\begin{aligned}\frac{d^p}{ds^p}\int_n^{n+1} e^{-st}\,d\alpha(t)&=\sum_{\nu=p}^{\infty}\frac{s^{\nu-p}}{(\nu-p)!}\int_n^{n+1}(-t)^{\nu}d\alpha(t)\\&=\int_n^{n+1} e^{-st}(-t)^p\,d\alpha(t),\end{aligned}$$

这就是(25.6)。

§ 26　Laplace-Stieltjes 变換的反演公式

定理 26.1　設积分

$$f(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\,d\alpha(t) \tag{26.1}$$

的收斂坐标是 σ_0，并且 $\alpha(t)=\frac{1}{2}\{\alpha(t+0)+\alpha(t-0)\}$, $(t>0)$，則对任一个正数 c, $c>\sigma_0$，有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{f(s)}{s}e^{st}\,ds=\begin{cases}\alpha(t)-\alpha(0), & t>0,\\ \dfrac{\alpha(+0)-\alpha(0)}{2}, & t=0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

这就是关于 Laplace-Stieltjes 变换的反演公式。

設 $\Re s=\sigma>0$, $\sigma>\sigma_0$. 于是

$$\int_0^R e^{-st}d\alpha(t)=e^{-sR}\alpha(R)-\alpha(0)+s\int_0^R e^{-st}\alpha(t)dt.$$

因为 $\sigma>0$, 所以由定理 24.2 有 $\alpha(R)=o(e^{\sigma_0 R})$ $(R\to\infty)$, 因此当 $R\to\infty$ 时,有

$$\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)=s\int_0^\infty e^{-st}\alpha(t)dt-\alpha(0)$$
$$=s\int_0^\infty e^{-st}(\alpha(t)-\alpha(0))dt.$$

設 $\alpha(t)-\alpha(0)=\alpha_1(t)$, 則有

$$\frac{f(s)}{s}=\int_0^\infty e^{-st}\alpha_1(t)dt. \tag{26.2}$$

又因为 $\alpha(t)=o(e^{\sigma_0 t})$, 即 $\alpha(t)e^{-\sigma t}=o(e^{-(\sigma-\sigma_0)t})$, 所以 $\alpha(t)e^{-\sigma t}\in L_1(0,\infty)$. 再由于 $\sigma>0$, 故此 $\alpha(0)e^{-\sigma t}\in L_1(0,\infty)$, 于是 $\alpha_1(t)\in L_1(0,\infty)$。这样, 对于反演公式的問題我們只需要討論形如(26.2)的 Laplace 的变换就够了。为了这个目的, 先証明下面的定理。

定理 26 2 設

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}\varphi(t)dt, \tag{26.3}$$

其中 $\Re(s)=\sigma>\sigma_0$, σ_0 是 Laplace 变换的收斂坐标。$\varphi(t)$ 在 t 的近傍是有界变分函数。于是

$$\frac{1}{2}\{\varphi(t+0)+\varphi(t-0)\}$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}f(s)e^{st}ds. \tag{26.4}$$

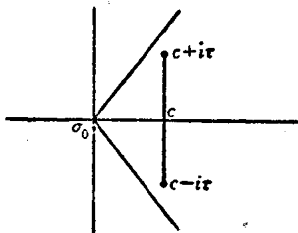


图 26.1

这里 c 是一个比 c_0 大的任意的数。

証明 我們先証这个定理,然后

再証定理 26.1。考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} f(s)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} f(c+i\tau)e^{(c+i\tau)t}d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{(c+i\tau)t}d\tau\int_0^\infty e^{-(c+i\tau)u}\varphi(u)du.$$

在里面的一个积分根据定理 25.1 当 $c>\sigma_0$, $|\tau|<T$ 时一致收斂。因此

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)du\int_{-T}^{T} e^{(c+i\tau)(t-u)}d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \varphi(u)e^{c(t-u)}\frac{\sin T(t-u)}{t-u}du.$$

最后这一积分是 Dirichlet 积分。由于 $\varphi(u)$ 在 $u=t$ 的近傍是有界变分的，并且属于 $L_1(0,\infty)$，所以当 $T\to\infty$ 时，这积分收斂于

$$\frac{1}{2}\{[\varphi(u)e^{c(t-u)}]_{t+0}+[\varphi(u)e^{c(t-u)}]_{t-0}\}.$$

而这个表达式恰好等于

$$\frac{1}{2}\{\varphi(t+0)+\varphi(t-0)\}.$$

証毕

定理 26.1 的証明 現在来証明

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{f(s)}{s}e^{st}ds=\begin{cases}\alpha(t)-\alpha(0), & t>0,\\ \dfrac{\alpha(+0)-\alpha(0)}{2}, & t=0,\\ 0, & t<0.\end{cases}\quad(26.5)$$

在定理 26.2 中，用 $\frac{f(s)}{s}$ 代替 $f(s)$ 来考虑。(26.2)的积分当 $\sigma>\sigma_0$($\Re s=\sigma$) 时是收斂的。于是对于大于 σ_0 的 c，取这样的 σ，满足 $c>\sigma>\sigma_0$，根据(26.4)就有

$$\frac{1}{2}\{\alpha_1(t+0)+\alpha_1(t-0)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{f(s)}{s}e^{st}ds.$$

这样已証明了(26.5)中第一行的公式。

令
$$\alpha_1^*(t)=\alpha(t)\geqslant 0\quad(t\geqslant 0),$$
$$\alpha_1^*(t)=0\qquad(t<0),$$

則(26.2)的右边可以写成

$$\frac{f(c+i\tau)}{c+i\tau}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau t}e^{-ct}\alpha_1^*(t)\,dt.$$

由于 $e^{-ct}\alpha_1^*(t)\in L_1(-\infty,\infty)$，所以上式的左边是函数 $\sqrt{2\pi}\,e^{-ct}\alpha_1^*(t)$ 的 Fourier 变换。于是由定理 5.1，有

$$\frac{1}{2}\{[e^{-ct}\alpha_1^*(t)]_{t+0}+[e^{-ct}\alpha_1^*(t)]_{t-0}\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{f(c+i\tau)}{c+i\tau}e^{i\tau t}d\tau.$$

把方程的两边除以 e^{-ct}，就得到

$$\frac{1}{2}\{\alpha_1^*(t+0)+\alpha_1^*(t-0)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{f(c+i\tau)}{c+i\tau}e^{(c+i\tau)t}d\tau.$$

左边当 $t<0$ 时是零。又当 $t=0$ 时，$\alpha_1^*(t-0)=0$，$\alpha_1^*(t+0)=\lim_{t\to+0}\{\alpha(t)-\alpha(0)\}=\alpha(+0)-\alpha(0)$. 証毕

因为定理 26.2 可以用 Fourier 变换直接地导出，所以用上面的方法当然也能得到 $t>0$ 情形的証明。

§27 結合函数的 Laplace-Stieltjes 变换

設 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 中的函数，并且在任意的有限区間中是有界变分函数，又假設它們是連續的❶，且 $\alpha(0)=0$, $\beta(0)=0$，那末

$$\gamma(t)=\int_0^t \alpha(t-u)\,d\beta(u) \tag{27.1}$$

就叫做 $\alpha(t)$ 及 $\beta(t)$ 的 Stieltjes **結合函数**。如果它和我們到現在为止所討論的結合函数的概念不会混淆，則就簡单地称之为結合函数。

利用分部积分法容易証明，現在的 $\gamma(t)$ 也等于

$$\int_0^t \beta(t-u)\,d\alpha(u),$$

❶ 如果把右边的积分看成 Lebesgue-Stieltjes 积分，那么这个条件可以不要。

而且 $\gamma(0)=0$. 于是我們引入和普通結合函数相同的写法

$$\gamma(t)=\alpha*\beta(t).$$

如果 α, β, γ 都是在原点处为零的有界变分函数,则成立着

$$(\alpha*\beta)*\gamma=\alpha*(\beta*\gamma). \tag{27.2}$$

現在討論一下結合函数的 Laplace 变換。对于 Laplace-Stieltjes 变換 $\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$, 如果积分

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}|d\alpha(t)| \quad (\Re s=\sigma)$$

收斂,那末就說这 Laplace-Stieltjes 积分絕对收斂。

設 $\alpha(t)$ 在 $[0, t]$ 中的全变分是 $u(t)$, 积分 $\int_0^\infty e^{-\sigma t}|d\alpha(t)|$ 的实际意义是

$$\lim_{R\to\infty}\sup\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\sigma t_i}|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)|,$$

这里 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=R$ 是分点, 而且是以分点选择的方式来取上确界 (sup) 的。可以証明它是积分 $\int_0^\infty e^{-\sigma t}du(t)$.

此外,

$$\left|\int_0^\infty \varphi(t)d\alpha(t)\right|\leqslant\int_0^\infty |\varphi(t)||d\alpha(t)|\left(=\int_0^\infty |\varphi(t)|du(t)\right). \tag{27.3}$$

定理 27.1 設 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 是标准化了的,并且在任意有限区間是有界变分的函数。又設它們都是連續的, 且 $\alpha(0)=0$, $\beta(0)=0$. 若是

$$f(s_0)=\int_0^\infty e^{-s_0t}d\alpha(t), \tag{27.4}$$

$$g(s_0)=\int_0^\infty e^{-s_0t}d\beta(t) \tag{27.5}$$

都絕对收斂,則

$$f(s_0)g(s_0)=\int_0^\infty e^{-s_0t}d\gamma(t). \tag{27.6}$$

这里 $\gamma=\alpha*\beta$. $\int_0^\infty e^{-s_0t}d\gamma(t)$ 也絶对收斂。如果令 $\Re s_0=\sigma_0$，則有

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_0t}|d\gamma(t)|\leqslant\int_0^\infty e^{-\sigma_0t}|d\alpha(t)|\cdot\int_0^\infty e^{-\sigma_0t}|d\beta(t)|. \quad (27.7)$$

証明　設 $A(t)$, $B(t)$ 是在 $[0, \infty]$ 內一般的連續有界变分函数。任意地取 a 和 b，并且令

$$0\leqslant a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b.$$

对于固定的 u，有

$$\sum_{i=0}^{n-1}|A(t_{i+1}-u)-A(t_i-u)|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i-u}^{t_{i+1}-u}|dA(v)|\leqslant\int_0^\infty|dA(v)|.$$

把最后的积分記作 V_A. 于是如取 $C(t)=A*B(t)$，則有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-1}|C(t_{i+1})-C(t_i)|\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_0^{t_{i+1}}A(t_{i+1}-u)dB(u)-\int_0^{t_i}A(t_i-u)dB(u)\right|\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_0^\infty\{A(t_{i+1}-u)-A(t_i-u)\}dB(u)\right|.\end{aligned}$$

这里如果当 $t<0$ 时，令 $A(t)=0$，那么 $A(t)$ 对負的 t 也就有了定义。根据(27.3)有

$$\begin{aligned}&\leqslant\int_0^\infty\sum_{i=0}^{n-1}|A(t_{i+1}-u)-A(t_i-u)||dB(u)|\\&\leqslant V_A\int_0^\infty|dB(u)|=\int_0^\infty|dA(u)|\cdot\int_0^\infty|dB(u)|,\end{aligned}$$

卽

$$\int_0^\infty|dC(t)|\leqslant\int_0^\infty|dA(t)|\cdot\int_0^\infty|dB(t)|. \quad (27.8)$$

上面 $A(t)$, $B(t)$ 是实数值函数，从而 $C(t)$ 也是实数值函数，但如果 $A(t)$, $B(t)$ 是复数值函数，那么 $C(t)$ 也不妨相应地看作复数值函数。不过应假設 $A(t)$ 与 $B(t)$ 的实部及虚部在 $[0, \infty)$ 中都是有界变分函数。这时也称 $A(t)$, $B(t)$ 为有界变分函数。于是若設

$$\sup\sum_{i=0}^{n-1}|C(t_{i+1})-C(t_i)|=\int_a^b|dC(t)|,$$

則 (27.8) 也完全同样地成立。这里上确界 (sup) 是对于一切分割方法取的。

现在令

$$A(t)=\int_0^t e^{-s_0 u}d\alpha(u),$$

$$B(t)=\int_0^t e^{-s_0 u}d\beta(u),$$

并且 $C(t)=A*B(t)$. 因为 (27.4) 及 (27.5) 絶对收敛，所以 $A(t)$ 和 $B(t)$ 在 $[0,\infty)$ 中是有界变分函数。于是

$$\int_0^R |dA(t)|=\sup\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-s_0 u}d\alpha(u)\right|$$

$$(0=t_0<t_1<\cdots<t_n=R)$$

(这里的上确界是对于一切的分割方法取的)。

可以取 t_i，满足 $|t_{i+1}-t_i|<\delta\ (i=0,1,\cdots,n-1)$. δ 是这样决定的. 对于已給的 ε，及满足条件 $t_i\leqslant u\leqslant t_{i+1}$ 的 u，成立着 $|e^{-s_0 u}-e^{-s_0 t_i}|<\varepsilon$. 于是

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-s_0 u}d\alpha(u)\right|-\sum_{i=0}^{n-1}\left|e^{-s_0 t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}d\alpha(u)\right|$$

$$<\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}|e^{-s_0 u}-e^{-s_0 t_i}|\,|d\alpha(u)|$$

$$<\varepsilon\int_0^R |d\alpha(u)|.$$

于是

$$\int_0^R |dA(t)|=\sup\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\sigma_0 t_i}|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)|$$

$$=\int_0^R e^{-\sigma_0 t}|d\alpha(t)|.$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |dA(t)|&=\int_0^\infty e^{-\sigma_0 t}|d\alpha(t)|,\\ \int_0^\infty |dB(t)|&=\int_0^\infty e^{-\sigma_0 t}|d\beta(t)|.\end{aligned}\tag{27.9}$$

又
$$C(t)=A(t)*B(t)=\int_0^t A(t-u)\,dB(u)$$
$$=\int_0^t\left(\int_0^{t-u} e^{-s_0 v}d\alpha(v)\right)e^{-s_0 u}d\beta(u),$$

由分部积分，右边

$$=\int_0^t\left[e^{-s_0(t-u)}\alpha(t-u)+s_0\int_0^{t-u} e^{-s_0 v}\alpha(v)\,dv\right]e^{-s_0 u}d\beta(u)$$
$$=\int_0^t e^{-s_0 t}\alpha(t-u)\,d\beta(u)+s_0\int_0^t e^{-s_0 u}d\beta(u)\int_0^t e^{-s_0(w-u)}\alpha(w-u)\,dw$$
$$=\int_0^t e^{-s_0 t}\alpha(t-u)\,d\beta(u)+s_0\int_0^t e^{-s_0 w}dw\int_0^w \alpha(w-u)\,d\beta(u)$$
$$=e^{-s_0 t}\gamma(t)+s_0\int_0^t e^{-s_0 w}\gamma(w)\,dw$$
$$=\int_0^t e^{-s_0 w}d\gamma(w). \tag{27.10}$$

由这个公式及(27.8)，(27.9)就得到

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_0 w}|d\gamma(w)|\leqslant\int_0^\infty e^{-\sigma_0 u}|d\alpha(u)|\int_0^\infty e^{-\sigma_0 u}|d\beta(u)|,$$

这就是(27.7)。因为

$$A(t)*B(t)-f(s_0)g(s_0)$$
$$=A(t)*B(t)-f(s_0)B(t)+f(s_0)(B(t)-g(s_0)) \tag{27.11}$$

的右边的第三項当 $t\to\infty$ 时收斂于零，因而設

$$A(t)*B(t)-f(s_0)B(t)$$
$$=\int_0^t\{A(t-u)-f(s_0)\}dB(u)$$
$$=\int_0^{t/2}+\int_{t/2}^t=I_1+I_2, \tag{27.12}$$

于是

$$|I_1|\leqslant\int_0^{t/2}|A(t-u)-f(s_0)||d\beta(u)|.$$

現在取 T_0 为这样大的数，使得当 $t>T_0$ 时，$|A(t)-f(s_0)|<\varepsilon$。($\varepsilon$ 是任意給定的一个正数。) 由于在上面的式子中 $t-u>\frac{t}{2}$，所

以如果取 $t>2T_0$，則有

$$|A(t-u)-f(s_0)|<\varepsilon.$$

于是

$$|I_1|<\varepsilon\int_0^{t/2}|dB(u)|\leqslant\varepsilon\int_0^{\infty}|dB(u)|,$$

即

$$I_1\to 0\quad (t\to\infty). \tag{27.13}$$

还有，

$$|I_2|\leqslant\int_{t/2}^{t}|A(t-u)-f(s_0)||dB(u)|$$
$$\leqslant(\max_{0\leqslant v<\infty}|A(v)|+|f(s_0)|)\int_{t/2}^{t}|dB(u)|.$$

由于 $A(t)$ 当 $t\to\infty$ 时收斂于 $f(s_0)$，所以它是有界的。其次，当 $t\to\infty$ 时，因为积分 $\int_0^{\infty}|dB(t)|<\infty$，$\int_{t/2}^{t}|dB(u)|\to 0$. 于是

$$I_2\to 0\quad (t\to\infty).$$

这样，把上面的結果和(27.13)代入(27.12)，就得到

$$\lim_{t\to\infty}A(t)*B(t)=f(s_0)g(s_0).$$

再把这个結果代入(27.11)，就有

$$\lim_{t\to\infty}C(t)=f(s_0)g(s_0).$$

由于(27.10)，$C(t)\to\int_0^{\infty}e^{-s_0t}d\gamma(t)$，这样就証明了(27.6)。

証毕

定理 27.2 設 $\alpha(t)$，$\beta(t)$ 是在任意閉有限区間中的連續有界变分函数，$\gamma(t)=\alpha*\beta(t)$. 若是

$$f(s_0)=\int_0^{\infty}e^{-s_0t}d\alpha(t), \tag{27.14}$$

$$g(s_0)=\int_0^{\infty}e^{-s_0t}d\beta(t) \tag{27.15}$$

收斂，并且其中有一个是絕对收斂的話，則 $\int_0^{\infty}e^{-s_0t}d\gamma(t)$ 收斂，而且

$$f(s_0)g(s_0)=\int_0^{\infty}e^{-s_0t}d\gamma(t). \tag{27.16}$$

証明　象在定理 27.2 的証明中那样地定义 $A(t), B(t), C(t)$，就能同样地証明

$$C(t)=A*B=\int_0^t e^{-s_0 w}d\gamma(w)$$

$\left(\text{这个証明中并不要用到} \int_0^\infty |dA(t)| \text{和} \int_0^\infty |dB(t)| \text{的有界性}\right)$。

另外，如果再假設了 Laplace 积分(27.15)是絕对收斂的，就能和前面的定理一样証明 $C(t)\to f(s_0)g(s_0)$。　**証毕**

下面特別討論一下

$$\alpha(t)=\int_0^t a(u)du, \quad \beta(t)=\int_0^t b(u)du$$

的情形。我們举出下面的定理作为上面定理的特殊情形。

定理 27.3　設 $a(t)$，$b(t)$ 在任意的有限区間 $(0, R)$ 中是屬于 $L(0, R)$ 的函数。令

$$c(t)=\int_0^t a(t-u)b(u)du. \tag{27.17}$$

另外，如果积分

$$f(s_0)=\int_0^\infty e^{-s_0 t}a(t)dt, \qquad g(s_0)=\int_0^\infty e^{-s_0 t}b(t)dt$$

都是絕对收斂的話，那么积分 $\int_0^\infty e^{-s_0 t}c(t)dt$ 也絕对收斂。并且

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t}c(t)dt=f(s_0)g(s_0). \tag{27.18}$$

証明　設

$$\alpha(t)=\int_0^t a(u)du, \quad \beta(t)=\int_0^t b(u)du,$$

則它們都是連續有界变分函数，并且当 $t=0$ 时等于零。因为 $f(s_0)$ 和 $g(s_0)$ 的积分都是絕对收斂的，所以容易証明积分

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t}d\alpha(t), \quad \int_0^\infty e^{-s_0 t}d\beta(t)$$

也絕对收斂。于是由于定理 27.1，如果令

$$\gamma(t)=\int_0^t a(t-u)d\beta(u)$$
$$=\int_0^t a(t-u)b(u)du,$$

那么积分 $\int_0^\infty e^{-s_0t}d\gamma(t)$ 絕对收斂，并且

$$\int_0^\infty e^{-s_0t}d\gamma(t)=f(s_0)g(s_0). \tag{27.19}$$

但是

$$\gamma(t)=\int_0^t\left(\int_0^{t-u}a(v)dv\right)b(u)du$$
$$=\int_0^t b(u)du\int_u^t a(w-u)dw$$
$$=\int_0^t dw\int_0^w a(w-u)b(u)du=\int_0^t c(w)dw,$$

所以 (27.19) 的右边等于积分 $\int_0^\infty e^{-s_0t}c(t)dt$。这样就証明了 (27.18)。

因为积分 $\int_0^\infty e^{-s_0t}d\gamma(t)$ 絕对收斂，所以 (27.18) 的左边絕对收斂。 証毕

同样地能够得到下面的定理。

定理 27.4 設 $a(t)$, $b(t)$ 是定理 27.3 中的函数，积分 (27.14), (27.15) 收斂，并且其中的一个絕对收斂。于是积分

$$\int_0^\infty e^{-s_0t}d\gamma(t)$$

收斂，并且(27.16)式成立，这里的 $\gamma(t)$ 等于

$$\int_0^t a(t-u)b(u)du.$$

§28 Laplace 变换的例題

直接計算积分

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}\varphi(t)dt, \tag{28.1}$$

就得到下面这些公式

$$\varphi(t)=1, \qquad f(s)=\frac{1}{s}, \qquad \Re s>0, \tag{28.2}$$

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant a,\\ 1, & t>a,\end{cases} \qquad f(s)=\frac{e^{-as}}{s}, \qquad \Re s>0, \tag{28.3}$$

$$\varphi(t)=t^{\alpha}, \qquad f(s)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \qquad \Re s>0, \tag{28.4}$$

$$\varphi(t)=e^{at}, \qquad f(s)=\frac{1}{s-a}, \qquad \Re s>\Re a, \tag{28.5}$$

$$\varphi(t)=\cosh ct, \qquad f(s)=\frac{s}{s^2-c^2}, \qquad \Re s>|\Re c|, \tag{28.6}$$

$$\varphi(t)=\sinh ct, \qquad f(s)=\frac{c}{s^2-c^2}, \qquad \Re s>|\Re c|, \tag{28.7}$$

$$\varphi(t)=\cos bt, \qquad f(s)=\frac{s}{s^2+b^2}, \qquad \Re s>|\Im b|, \tag{28.8}$$

$$\varphi(t)=\sin bt, \qquad f(s)=\frac{b}{s^2+b^2}, \qquad \Re s>|\Im b|, \tag{28.9}$$

$$\varphi(t)=\frac{\cos(x\sqrt{t})}{\pi\sqrt{t}}, \qquad f(s)=\frac{e^{-x^2/(4s)}}{\sqrt{\pi s}}, \qquad \Re s>0, \tag{28.10}$$

(x 为定数) （$\sqrt{s}$ 是当 $s>0$ 时取正值的分支）

$$\varphi(t)=\frac{\sin(x\sqrt{t})}{\pi}, \qquad f(s)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}\,s^{3/2}}e^{-x^2/(4s)}, \qquad \Re s>0, \tag{28.11}$$

(x 为定数)

$$\varphi(t)=J_0(at)\ (a>0), \qquad f(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}, \qquad \Re s>0, \tag{28.12}$$

（$\sqrt{\ }$ 是当其内部为正时，取正值的分支）

$$\varphi(t)=J_\nu(t),\ \Re\nu>1, \qquad f(s)=\frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^\nu}{\sqrt{1+s^2}}, \qquad \Re s>0. \tag{28.13}$$

（$\sqrt{\ }$ 是当其内部为正时，取正值的分支）

(28.4)的証明　首先考虑积分

$$\int_0^R e^{-st}t^a\,dt=\int_0^{sR}e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^a\frac{du}{s}.$$

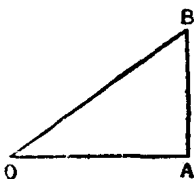


图 28.1

这里的积分路綫是連結点 sT 与原点的直綫。令 $s=re^{i\theta}$. 在左边的图中，設 B 是 sT 这样的点，A 是 $rT\cos\theta$ 这样的点。由 O 到 B 的积分显然等于由 O 到 A 的积分再加上由 A 到 B 的积分。于是有

$$\int_0^T e^{-st}t^a\,dt=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^{rT\cos\theta}e^{-u}u^a\,du$$

$$+\frac{i}{s^{a+1}}\int_0^{rT\sin\theta}e^{-(rT\cos\theta+iv)}(rT+iv)^a\,du.$$

这里由于 $|\theta|<\frac{\pi}{2}$(因 $\Re s>0$)，所以当 $T\to\infty$ 时，容易証明右边的第二项收斂于零，并且第一项收斂于

$$\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^a\,du=\Gamma(a+1)/s^{a+1}.$$

(28.10)的証明　当 $s>0$ 的时候，有

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{\cos(x\sqrt{t})}{\pi\sqrt{t}}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-su^2}\cos xu\,du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-su^2}\cos xu\,du$$

$$=\Re\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-su^2}e^{-ixu}\,du\right),$$

根据(3.15)

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi s}}e^{-x^2/(4s)}.$$

設 s 是复数，则当 $\Re s>0$ 时，积分 $\int_0^\infty e^{-st}\cos(x\sqrt{t})/(\pi\sqrt{t})dt$ 是正则的。又 $\frac{1}{\sqrt{\pi s}}e^{-x^2/(4s)}$ 当 $\Re s>0$ 时也是正则的。如果考虑 $\sqrt{s}$ 在正实軸上取正值的那个分支，则沿着正实軸两者完全一致，

于是得到了(28.10)。

(28.12)的証明 在(22.5)中令 $k-2=2\nu$ (并設 $\tau r=ax$), 則

$$J_\nu(ax)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_0^\pi e^{iax\cos\phi}(\sin\phi)^{2\nu}d\phi.$$

当 $\nu=0$ 时,有

$$J_0(ax)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{iax\cos\phi}d\phi.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}J_0(at)dt&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^\pi e^{iat\cos\phi}d\phi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\phi\int_0^\infty e^{-st+iat\cos\phi}d\phi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\phi}{s-ia\cos\phi}.\end{aligned}$$

这个定积分虽然可以用初等方法求积,这里我們用一般的方法——对于正弦或是余弦的有理函数的定积分計算法——来求出积分的值。令

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\phi}{s-ia\cos\phi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{s-ia\cos\phi}.$$

設 $e^{i\phi}=z$, C 为单位圓 $(d\phi=i^{-1}z^{-1}dz)$, 則

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{z^{-1}dz}{i\left\{s-\frac{1}{2}ia(z+z^{-1})\right\}}\\&=\frac{\alpha}{\pi}\int_C\frac{dz}{(z+i\alpha s+i\sqrt{1+\alpha^2s^2})(z+i\alpha s-i\sqrt{1+\alpha^2s^2})}\end{aligned}$$

$\left(\alpha=\frac{1}{a}\right)$. 被积函数在 $i(\alpha s+\sqrt{1+\alpha^2s^2})$ 及 $i(\alpha s-\sqrt{1+\alpha^2s^2})$ 处具有一阶的极, 上面的积分 $\left(\text{被乘以}\ \frac{1}{2\pi i}\ \text{后}\right)$ 就是在 C 中的极所具有的留数的和。但是只有 $i(\alpha s-\sqrt{1+\alpha^2s^2})$ 是属于 C 内的极(由于 $s>0$, $a>0$), 故此在这点的留数就是上面积分的值。但

$$\operatorname{Res}\frac{1}{(z+ias+i\sqrt{1+\alpha^2s^2})(z+i\alpha s-i\sqrt{1+\alpha^2s^2})}$$

$$=\lim_{z\to p}\frac{1}{z+i\alpha s+i\sqrt{1+\alpha^2s^2}}\quad (p=-i\alpha s+i\sqrt{1+\alpha^2s^2})$$

$$=\frac{1}{2i\sqrt{1+\alpha^2s^2}}.$$

于是

$$I=2\pi i\cdot\frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{2i\sqrt{1+\alpha^2s^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+s^2}}.$$ 証毕

(28.13)的証明从略。

第6章　Fourier 变换和 Laplace 变换的性质和几个应用

§29　导函数与 Fourier 变换

設 $f(x)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)$,

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}f(x)dx.$$

把这个等式微分,形式地得到

$$F'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)e^{-ixt}f(x)dx.$$

現在来証明这个公式。

定理 29.1　設 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$, $xf(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. 如果 $f(x)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)$, 則 $F(t)$ 可微,并且

$$F'(t)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}xf(x)dx. \tag{29.1}$$

証明　由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(F(t+h)-F(t))&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix(t+h)}-e^{-ixt}}{h}f(x)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixh}-1}{h}e^{-ixt}f(x)dx,\end{aligned} \tag{29.2}$$

且

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-ixh}-1}{h}e^{-ixt}f(x)\right|&=\left|\frac{e^{-\frac{ixh}{2}}-e^{\frac{ixh}{2}}}{h}\right||f(x)|\\&\leqslant\left|\frac{2}{h}\sin\frac{xh}{2}\right||f(x)|\leqslant|xf(x)|,\end{aligned}$$

而 $xf(x)\in L_1(-\infty,\infty)$, 所以(29.2)的右边当 $h\to0$ 时的极限,等于在积分符号内取极限后再积分的值,即

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)e^{-ixt}f(x)dx.$$ 証毕

同样得到下面的定理。

定理 29.2　設 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，$x^nf(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，$f(x)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)$，則 $F(t)$ n 次可微，并且

$$F^{(n)}(t)=\frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}f(x)dx. \tag{29.3}$$

与这些定理类似的定理对于 $f\in L_2$ 的情形也成立。

定理 29.3　設 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，$xf(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，并且 $-ixf(x)$ 的 L_2 的 Fourier 变换是 $G(t)$，$f(x)$ 的 L_2 的 Fourier 变换是 $F(t)$，則

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h}$$

平均收斂于 $G(t)$。

証明　由于 $\frac{1}{h}\{F(t+h)-F(t)\}$ 的 Fourier 变换是

$$f(x)\frac{e^{-ixh}-1}{h},$$

于是根据 Parseval 公式有

$$\begin{aligned}J&=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{h}\{F(t+h)-F(t)\}-G(t)\right|^2dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\frac{e^{-ixh}-1}{h}-(-ix)f(x)\right|^2dx.\end{aligned}\tag{29.4}$$

因为 $\left|\frac{e^{-ixh}-1}{h}+x\right|\leqslant 2x$，于是 (29.4) 中最后的被积函数不超过 $|2xf(x)|^2$. 因为这个函数属于 $L_1(-\infty,\infty)$，所以对于 $h\to 0$ 的极限可以取在积分符号之內。由于 $(e^{-ixh}-1)/h-(-ix)\to 0$，所以 $h\to 0$ 时，$J\to 0$. 証毕

現在討論定理 29.1 的逆定理。

定理 29.4　設 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，$f'(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. $f(x)$ 的 Fourier 变换記为 $F(t)$，那么 $f'(x)$ 的 Fourier 变换等于

$-itF(t)$.

証明 設 a 是某一个固定数。由于

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(x)dx,$$

若令 $x\to\infty$，則因 $f'\in L_1$，所以

$$\int_a^x f'(x)dx\to c \quad (x\to\infty),$$

于是 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c_1$，$c_1$ 是常数。同样地由于

$$\int_a^x f'(x)dx\to d \quad (x\to-\infty),$$

因而有常数 d_1，使得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=d_1$. 因为 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，所以 $c_1=d_1=0$. 于是 $f(x)\to 0 \quad (x\to\pm\infty)$.

这样就能进行下面的运算：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} e^{-itx}f'(x)dx\\ &\quad=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[f(x)e^{-itx}\Big]_{-A}^{A}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}(-it)e^{-itx}f(x)dx,\end{aligned}$$

令 $A\to\infty$，就有

$$\begin{aligned}&\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-it)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}f(x)dx\\ &=-it\cdot F(t).\end{aligned}$$

証毕

根据 Riemann–Lebesgue 定理，我們知道，若 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，則 $F(t)\to 0(t\to\pm\infty)$. 由上面定理进一步知道，若 $f'(x)$ 存在，且 $f'(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，那么 $F(t)=o(t^{-1})\,(t\to\infty)$[1]. 这个理由很明显，由于 $f'(x)$ 的 Fourier 变换是 $-itF(t)$，而根据 Riemann–Lebesgue 定理它应該收斂于零，这就是上面的断語。

§30 有限 Fourier 变换的渐近級数

称

[1] 原文誤为 $O(t^{-1})$. ——校者注

$$\int_a^b f(x)e^{-ixt}dx \tag{30.1}$$

为有限 **Fourier 变换**，其中 a, b 是有限的数，而 $f(x)\in L_1(a, b)$. 我們現在研究一下当 $t\to\infty$ 时积分(30.1)的大小。

一般，如果 $\varphi(t)$ 是一个已給函数，并且

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{N}a_n\varphi_n(t)+o(\varphi_N(t)),\quad t\to t_0. \tag{30.2}$$

这时，就叫

$$\sum a_n\varphi_n(t) \tag{30.3}$$

是 $\varphi(t)$ 的达到 N 次的漸近級数。如果(30.2)对于一切的 N 都成立的話，就写成

$$\varphi(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(t),\ t\to t_0, \tag{30.4}$$

(30.3)的右边叫做 $\varphi(t)$ 的漸近級数。当然，漸近級数不一定是收斂的。

本节中我們将研究当 $t\to\infty$ 时，积分(30.1)的漸近級数。

定理 30.1　設函数 $f(x)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 中具有連續的 N 阶导函数，則

$$\int_a^b e^{-ixt}f(x)dx=B_N(t)-A_N(t)+o(t^{-N}),\quad t\to\infty. \tag{30.5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A_N(t)&=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}i^n f^{(n-1)}(a)t^{-n}e^{-ita},\\ B_N(t)&=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}i^n f^{(n-1)}(b)t^{-n}e^{-itb}.\end{aligned}\right\} \tag{30.6}$$

証明　利用分部积分容易証明下面的等式:

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-ixt}f(x)dx&=\left[\frac{e^{-ixt}}{-it}f(x)\right]_a^b+\frac{1}{it}\int_a^b e^{-ixt}f'(x)dx\\&=if(b)t^{-1}e^{-ibt}-if(a)t^{-1}e^{-iat}\\&\quad+\frac{1}{it}\left[\frac{e^{-ixt}}{-it}f'(x)\right]_a^b+\frac{1}{(it)^2}\int_a^b e^{-ixt}f''(x)dx\\&=if(b)t^{-1}e^{-ibt}-i^2f'(b)t^{-2}e^{-ibt}\end{aligned}$$

$$-if(a)t^{-1}e^{-iat}+i^2f'(a)t^{-2}e^{-iat}$$

$$+\frac{1}{(it)^2}\int_a^b e^{-ixt}f''(x)dx.$$

反复地用这种方法，就得到

$$=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}i^n t^{-n}f^{(n-1)}(b)e^{-ibt}$$

$$-\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}i^n t^{-n}f^{(n-1)}(a)e^{-iat}$$

$$+\frac{1}{(it)^N}\int_a^b e^{-ixt}f^{(N)}(x)dx.$$

据 Riemann–Lebesgue 定理有

$$\int_a^b e^{-ixt}f^{(N)}(x)dx=o(1),$$

于是就証明了(30.5)。 証毕

若是 $f^{(n)}(x)\to 0,\ (x\to-\infty),\ n=0,1,\cdots,N-1,$

并且 $f^{(N)}(x)\in L_1(-\infty,b)$ 的話，那么(30.5)对于积分 $\int_{-\infty}^{b}$ 成立。又如果

$$f^{(n)}(x)\to 0,\ (x\to\infty),\ n=0,1,\cdots,N-1,\ f^{(N)}(x)\in L_1(a,\infty)$$

的話，那么(30.5)对于积分 $\int_a^\infty$ 也成立。

下面我們討論一下当积分区間的一个端点是函数的奇异点的情形。

定理 30.2 (i) 設 $f(x)$ 在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 中具有連續的 N 阶导函数，并且 $f^{(n)}(b)=0,\ n=0,1,\cdots,N-1$. 又設 $0<\lambda<1$，則有

$$\int_a^b e^{-itx}(x-a)^{\lambda-1}f(x)dx=-A_N(t)+o(t^{-N}),\ t\to\infty. \qquad (30.7)$$

这里

$$A_N(t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\Gamma(n+\lambda-1)}{(n-1)!}e^{-\pi i(n+\lambda+1)/2}f^{(n-1)}(a)t^{-n+1-\lambda}e^{-ita}. \qquad (30.8)$$

(ii) 設 $f(x)$ 在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 中具有連續的 N 阶导函数,并且 $f^{(n)}(a)=0$, $n=0, 1, \cdots, N-1$, 又設 $0<\mu<1$, 则有

$$\int_a^b e^{-ixt}(b-x)^{\mu-1}f(x)dx=B_N(t)+o(t^{-N}),\ t\to\infty. \quad (30.9)$$

这里

$$B_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\Gamma(n+\mu-1)}{(n-1)!}e^{-\pi i(n-1+3\mu)/2}f^{(n-1)}(b)t^{-n+1-\mu}e^{-itb}. \quad (30.10)$$

証明 我們来証明(30.7)。至于(30.9)的証明方法是同样的。利用分部积分,就有

$$\int_a^b e^{-itx}(x-a)^{\lambda-1}f(x)dx$$
$$=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\Big[\underbrace{\int\cdots\int}_{N}e^{-itx}(x-a)^{\lambda-1}dx\cdot f^{(n-1)}(x)\Big]_a^b$$
$$+(-1)^N\int_a^b\Big(\underbrace{\int\cdots\int}_{N}e^{-itx}(x-a)^{\lambda}dx\Big)\cdot f^{(N)}(x)dx. \quad (30.11)$$

現在設 $x>a$,并引入下面的写法:

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_{x-i\infty}^{x}(u-x)^n(u-a)^{\lambda-1}e^{-itu}du=h_{n+1}(x). \quad (30.12)$$

由于积分的絕对值是

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty|u-x|^n|u-a|^{\lambda-1}e^{-ty}dy<\infty \quad (u=x-iy),$$

所以

$$\frac{d}{dx}h_{n+1}(x)$$

$$=\lim_{h\to0}\Big[\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{h}\Big(\int_{x+h-i\infty}^{x+h}-\int_{x-i\infty}^{x}\Big)(u-x-h)^n\cdot(u-a)^{\lambda-1}e^{-itu}du$$
$$+\frac{(-1)^n}{n!}\int_{x-i\infty}^{x}\frac{1}{h}\{(u-x-h)^n-(u-x)^n\}(u-a)^{\lambda-1}e^{-itu}du\Big]$$
$$=\Big[\frac{(-1)^n}{n!}(u-x)^n(u-a)^{\lambda-1}e^{-itu}\Big]_{u=x}$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_{x-i\infty}^{x}(u-x)^{n-1}(u-a)^{\lambda-1}e^{-itu}du=h_n(x).$$

又因为

$$h_1(x)=\int_{x-i\infty}^{x}(u-a)^{\lambda-1}e^{-itu}\,du,$$

幷能証明 $h_1'(x)=(x-a)^{\lambda-1}e^{-itx}$，所以得到

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{n}e^{-itx}(x-a)^{\lambda-1}\,dx=h_n(x).$$

于是根据(30.11)有

$$\begin{aligned}&\int_a^b e^{-itx}(x-a)^{\lambda-1}f(x)dx\\&\quad=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}[h_n(b)f^{(n-1)}(b)-h_n(a)f^{(n-1)}(a)]\\&\qquad+(-1)^N\int_a^b h_N(x)f^{(N)}(x)dx\\&\quad=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}h_n(a)f^{(n-1)}(a)\\&\qquad+(-1)^N\int_a^b h_N(x)f^{(N)}(x)dx.\end{aligned}\tag{30.13}$$

現在对 $h_n(x)$ 进行一下估計。在(30.12)中，令 $u=x-iy$，則有

$$h_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^\infty i(-iy)^{n-1}(x-iy-a)^{\lambda-1}e^{-itx}e^{-ty}dy.\tag{30.14}$$

由于 $|x-iy-a|\geqslant x-a,\ |x-iy-a|^{\lambda-1}\leqslant(x-a)^{\lambda-1}\quad(0<\lambda<1)$，于是

$$|h_n(x)|\leqslant\frac{(x-a)^{\lambda-1}}{(n-1)!}\int_0^\infty y^{n-1}e^{-iy}dy=(x-a)^{\lambda-1}t^{-n}.\tag{30.15}$$

又由(30.14)有

$$\begin{aligned}h_n(a)&=\frac{(-1)^{n-1}i}{(n-1)!}\int_0^\infty(-iy)^{n+\lambda-2}e^{-ita}e^{-ty}dy\\&=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(-i)i^{n+\lambda-2}e^{-ita}\Gamma(n+\lambda-1)t^{-n-\lambda+1}\\&=(-1)^{n-1}e^{-\frac{\pi i}{2}(n+\lambda+1)}e^{-ita}\Gamma(n+\lambda-1)t^{-n-\lambda+1}.\end{aligned}\tag{30.16}$$

再利用一下(30.15)就有

$$\left|\int_a^b h_N(x)f^{(N)}(x)dx\right| \leqslant t^{-n}\int_a^b (x-a)^{\lambda-1}|f^{(N)}(x)|dx = O(t^{-n}).$$

把这个式子連同(30.16)代入(30.13)，就得到

$$\int_a^b e^{-itx}(x-a)^{\lambda-1}f(x)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{\Gamma(n+\lambda-1)}{(n-1)!}e^{-\frac{\pi i}{2}(n+\lambda+1)}f^{(n-1)}(a)t^{-n-\lambda+1}e^{-ita}.$$ 証毕

定理 30.2 在 $\lambda=1$ 及 $\mu=1$ 时也是成立的。譬如当 $\lambda=1$ 时，这时的 $A_N(t)$ 就成为定理 30.1 中的 $A_N(t)$，并且 $O(t^{-N})$ 在 (30.5) 中变为 $o(t^{-N})$。所以定理 30.1 是比較好的。

下面討論一下区間的两端都是奇异点的情形。

定理 30.3　設 $f(x)$ 在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 中具有連續的 N 阶导函数，并且 $0<\lambda\leqslant 1$, $0<\mu\leqslant 1$. 于是

$$\int_a^b (x-a)^{\lambda-1}(b-x)^{\mu-1}e^{-ixt}f(x)dx$$

$$=B_N(t)-A_N(t)+O(t^{-N}),\quad t\to\infty. \tag{30.17}$$

这里

$$A_N(x)$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{\Gamma(n+\lambda-1)}{(n-1)!}e^{-\frac{\pi i}{2}(n+\lambda+1)}t^{-n-\lambda+1}e^{-ita}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[(b-a)^{\mu-1}f(a)], \tag{30.18}$$

$$B_N(x)$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{\Gamma(n+\mu-1)}{(n-1)!}e^{-\frac{\pi i}{2}(n+3\mu-1)}t^{-n-\mu+1}e^{-itb}\frac{d^{n-1}}{db^{n-1}}[(b-a)^{\lambda-1}f(b)]. \tag{30.19}$$

当 $\lambda=\mu=1$ 时，在(30.17)右边的 $O(t^{-N})$ 就用 $o(t^{-N})$ 代替。

証明　設 $\nu(x)$ 是在区間 (a, b) 中无限次可微的函数，并且

$$\nu(a)=1,\quad \nu^{(n)}(a+0)=0,\quad n=1, 2, \cdots. \tag{30.20}$$

又設

$$\nu^{(n)}(b-0)=0, 1, 2, \cdots. \tag{30.21}$$

譬如令

$$\nu(x)=\int_x^b \exp\left(-\frac{1}{u-a}-\frac{1}{b-u}\right)du\Big/\int_a^b \exp\left(-\frac{1}{u-a}-\frac{1}{b-u}\right)du,$$

那末它就满足(30.20)及(30.21). 利用这个函数,就得到

$$\begin{aligned}&\int_a^b e^{-ixt}(x-a)^{\lambda-1}(b-x)^{\mu-1}f(x)\,dx\\&=\int_a^b e^{-ixt}(x-a)^{\lambda-1}[\nu(x)(b-x)^{\mu-1}f(x)]\,dx\\&\quad+\int_a^b e^{-ixt}(b-x)^{\mu-1}[\{1-\nu(x)\}(x-a)^{\lambda-1}f(x)]\,dx\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

积分 I_1 具有定理 30.2 中(30.7)的形状, 只是(30.7)中的 f 现在是 $\nu(x)(b-x)^{\mu-1}f(x)$. 由于这个函数的一切导函数在 $x=b-0$ 处等于零,于是只要注意一下

$$\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\nu(x)(b-x)^{\mu-1}f(x)]\right\}_{x=a}=\frac{d^{n-1}}{d^{n-1}a}\{(b-a)^{\mu-1}f(a)\}$$

就能了解(30.18)应該成立。

同样地能够証明积分 I_2 就是 (30.19). 当 $\lambda=\mu=1$ 的时候, 根据定理 30.1, 就把 $O(t^{-N})$ 写成 $o(t^{-N})$. 証毕

§ 31 函数变换和 Fourier 积分及 Laplace 积分

設 $f(x)$ 的 Fourier 变換是 $F(t)$, 下面的定理决定 $f(ax+b)$ 的 Fourier 变換。

定理 31.1 設 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ 或是 $\in L_2(-\infty,\infty)$, 則 $f(ax+b)$ 的 Fourier 变換

当 $a>0$ 时, 是 $$\frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right)e^{-\frac{itb}{a}},$$

当 $a<0$ 时, 是 $$-\frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right)e^{-\frac{itb}{a}}.$$

証明　(i) 設

$$f(x)\in L_1(-\infty,\infty),$$

則

$$f(ax+b)\in L_1(-\infty,\infty),$$

于是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(ax+b)e^{-itx}dx=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-it\frac{u-b}{a}}du,\ a>0$$

(可在左边令 $ax+b=u$. 考虑当 x 在 $(-\infty,\infty)$ 中变动时，由于 $a>0$，所以 u 也在 $(-\infty,\infty)$ 中变动，就得到右边)。同样地当 $a<0$ 时，左边就

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-it\frac{u-b}{a}}du.$$

所以两式合并，左边就

$$=\pm\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{\frac{itb}{a}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-\frac{itu}{a}}du.$$

(ii) 又如果 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ 时，令 $a>0$，則

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}f(ax+b)e^{-itx}dx-\frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right)e^{-\frac{itb}{a}}\right|^2dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a}\int_{-aA+b}^{aA+b}f(u)e^{-it\frac{u-b}{a}}du-\frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right)e^{-\frac{itb}{a}}\right|^2dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-aA+b}^{aA+b}f(u)e^{-i\frac{t}{a}u}du-F\left(\frac{t}{a}\right)\right|^2dt$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-aA+b}^{aA+b}f(u)e^{-iyu}du-F(y)\right|^2dy.$$

这个式子，因为 F 是 f 的 Fourier 变换，所以当 $A\to\infty$ 时收斂于零。对于 $a<0$ 时，証明可以同样地进行。　　　　証毕

下面討論一下关于 Laplace 变换的情形。

定理 31.2　$f(t)\ (0<t<\infty)$ 是已給的函数，設

$$f_1(t)=f(at-b),\quad t\geqslant b/a\quad (a>0,\ b\geqslant 0)$$
$$=0,\qquad t<b/a.$$

又設 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s)$ 当 $\Re s>c$ 时收斂，那么 $f_1(t)$ 的

Laplace 变换 $F_1(s)$ 当 $\Re s > ca$ 时收斂，并且

$$F_1(s)=\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}s}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

証明 設

$$\int_0^R e^{-st}f_1(t)dt=\int_{\frac{b}{a}}^R e^{-st}f(at-b)dt=\frac{1}{a}\int_0^{aR-b}e^{-s\frac{u+b}{a}}f(u)du$$

$$=\frac{1}{a}e^{-\frac{sb}{a}}\int_0^{aR-b}e^{-\frac{s}{a}u}f(u)du.$$

当 $R\to\infty$ 时，由于 $\Re(s/a)>c$，所以积分收斂，但是

$$\frac{1}{a}e^{-\frac{sb}{a}}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u}f(u)du=\frac{1}{a}e^{-\frac{sb}{a}}F\left(\frac{s}{a}\right).$$ 証毕

定理 31.3 設 $f(t)$ 当 $\Re s>c$ 时的 Laplace 变换是 $F(s)$，则 $F(as+b)\left(其中\ a>0,\ \Re s>-\frac{b}{a}\right)$ 是 $\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}t}f\left(\frac{t}{a}\right)$ 的 Laplace 变换。

这个定理的証明也很簡单，故从略。

下面研究一下 n 重积分及 n 阶导函数的 Laplace 变换。以后常常用下面的写法：

$$\int_0^t dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}}dt_{n-2}\cdots\int_0^{t_1}f(u)du=\left(\int_0^t du\right)^n f(u).$$

变换一下积分 $\int_0^{t_2}dt_1\int_0^{t_1}f(u)du$ 中的积分順序，就有

$$\int_0^{t_2}f(u)du\int_u^{t_2}dt_1=\int_0^{t_2}(t_2-u)f(u)du.$$

反复地使用这种方法，就得到

$$\int_0^t dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}}dt_{n-2}\cdots\int_0^{t_1}f(u)du=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t(t-u)^{n-1}f(u)du.$$

定理 31.4 設 $f(t)$ 的 Laplace 积分 $F(s)$ 当 $\Re s>c>0$ 时收斂，则

$$f_n(t)=\left(\int_0^t\right)^n f(u)du$$

的 Laplace 积分 $F_n(s)$ 当 $\Re s>c>0$ 时收斂，并且

$$F_n(s)=s^{-n}F(s). \tag{31.1}$$

証明　这里只証明当 $n=1$ 的情形，一般的情形可以把同样的方法重复地使用而得到。事实上，

$$\int_0^R e^{-st}dt\int_0^t f(u)\,du=\int_0^R f(u)\,du\int_u^R e^{-st}dt$$
$$=\int_0^R s^{-1}e^{-su}f(u)du-\int_0^R s^{-1}e^{-sR}f(u)du=I_1-I_2.$$

根据假設，当 $\Re s>c$，$R\to\infty$ 时，积分

$$I_1=s^{-1}\int_0^R e^{-su}f(u)\,du$$

收斂于 $s^{-1}F(s)$。令 $\Re s=\sigma$．由于 $\sigma>0$，所以据定理 24.2，有

$$\int_0^R f(u)\,du=o(e^{\sigma R}).$$

于是

$$I_2=s^{-1}e^{-\sigma R}o(e^{\sigma R})=o(1).$$

証毕

定理 31.5　設 $f(t)$ 当 $t>0$ 时 n 次可微，并且

$$f(+0),\ f'(+0),\ \cdots,\ f^{(n-1)}(+0),$$

都是存在的。若 $f^{(n)}(t)$ 的 Laplace 变换 $F_n(s)$ 当 $\Re s>c>0$ 时收斂的話，那么 $f^{(n-1)}(t),\cdots,f'(t),f(t)$ 的 Laplace 变换当 $\Re s>c$ 时也收斂，并且有

$$F_n(s)=s^nF(s)-f(+0)s^{n-1}-f'(+0)s^{n-2}$$
$$-\cdots-f^{(n-1)}(+0). \tag{31.2}$$

这里的 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的 Laplace 变换。

証明　只証明 $n=1$ 的情形，一般的情形可以重复这里的討論而得到。事实上，

$$\int_0^R e^{-su}f'(u)\,du=\Big[f(u)e^{-su}\Big]_0^R+s\int_0^R e^{-su}f(u)\,du. \tag{31.3}$$

若 $f'(t)$ 的 Laplace 变换对于 s $(\Re s>c>0)$ 收斂的話，根据定理 24.2 就有

$$f(u)=o(e^{\sigma R})\quad(\sigma=\Re s),$$

于是当 $R\to\infty$ 时，$f(R)e^{-sR}\to 0$. 由于这个理由，(31.3)左边的积分应該是收斂的，所以右边的积分 $\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$，即 $f(u)$ 的 Laplace 变换也应該收斂。故此当 $R\to\infty$ 时，有

$$\int_0^\infty e^{-su}f'(u)du=-f(+0)+s\int_0^\infty e^{-su}f(u)du. \qquad \text{証毕}$$

§ 32 Laplace 方法

現在我們研究具有下列形狀的积分：

$$f(x)=\int_a^b g(t)e^{xh(t)}dt \tag{32.1}$$

当 $x\to\infty$ 时的狀态。設 $h(t)$ 是仅取实数値的函数，并且它在 $t=\tau$ 处有极大値，即 $h(t)<h(\tau)$ $(t\neq\tau)$.

当 x 这个数很大时，被积函数在 τ 的近傍迅速地趋于极大値，所以积分自身的値，实际由在 τ 附近的値所支配着。因此可以把被积函数在 $t=\tau$ 的近傍展开，而由此求得积分的漸近値。这种求积分(32.1)的近似値的方法，叫做 **Laplace 方法**。

現在設 $h(t)$ 在 $t=a$ 处有极大値，即 $h(t)<h(a)$，$a<t\leqslant b$. $g(t)$ 是連續函数，h 具有連續的二阶导函数，并且

$$h'(a)=0, \quad h''(a)<0.$$

令

$$h(a)-h(t)=u^2. \tag{32.2}$$

若 η 是十分小的正数，則 $h'(t)$ 在 $a<t<a+\eta$ 中恒是負的，这就是說根据(32.2)所唯一确定的 $u(u>0)$ 是 t 的单調函数。于是可設

$$h(t)\leqslant h(a+\eta) \quad (a+\eta\leqslant t\leqslant b).$$

設 $g(a)\neq 0$. 把 η 取得足够小，則对于任一个已給的数 ε，可以使得

$$g(t)>\varepsilon>0 \quad (a\leqslant t\leqslant a+\eta)$$

(或是 $g(t)<-\varepsilon$，結果也一样)。

由于 $h(t)$ 对 $a<t<a+\eta$ 是减函数，因而可以設

$$h(t)-h(a+\eta)>\varepsilon'>0 \quad (a\leqslant t\leqslant a+\eta'<a+\eta).$$

于是有

$$\frac{\left|\int_{a+\eta}^{b} g(t)e^{xh(t)}dt\right|}{\left|\int_{a}^{a+\eta} g(t)e^{xh(t)}dt\right|}\leqslant\frac{\left|\int_{a+\eta}^{b} g(t)e^{xh(a+\eta)}dt\right|}{\left|\int_{a}^{a+\eta} g(t)e^{xh(t)}dt\right|}$$

$$=\frac{\int_{a+\eta}^{b}|g(t)|dt}{\left|\int_{a}^{a+\eta} g(t)e^{x(h(t)-h(a+\eta))}dt\right|}\leqslant\frac{\int_{a+\eta}^{b}|g(t)|dt}{\varepsilon\int_{a}^{a+\eta'} e^{x(h(t)-h(a+\eta))}dt}$$

$$\leqslant\frac{\int_{a+\eta}^{b}|g(t)|dt}{\varepsilon e^{\varepsilon' x}\eta'}\to 0 \quad (x\to\infty).$$

因此有

$$f(x)\sim\int_{a}^{a+\eta} g(t)e^{xh(t)}dt. \tag{32.3}$$

利用(32.2)作积分变数的变换，就得到

$$\int_{a}^{a+\eta} g(t)e^{xh(t)}dt=-\int_{0}^{U}2u\frac{g(t)}{h'(t)}\{\exp x(h(a)-u^2)\}du, \tag{32.4}$$

其中

$$U=[h(a)-h(a+\eta)]^{\frac{1}{2}}.$$

当 $t\to a$ 时，$g(t)\to g(a)$，又因为有

$$\frac{u}{h'(t)}=\frac{(h(a)-h(t))^{\frac{1}{2}}}{h'(t)-h'(a)}=\frac{\left\{\frac{-(t-a)^2}{2}h''(\xi_1)\right\}^{\frac{1}{2}}}{(t-a)h''(\xi_2)}$$

$(a<\xi_1, \xi_2<t)$，所以当 $t\to a$ 时，有

$$\frac{2u}{h'(t)}\to\left[\frac{-2}{h''(a)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

若是 η 相当小的話，U 也相当小，故此(32.4)右边的积分能够写成

$$\left[\frac{-2}{h''(a)}\right]^{\frac{1}{2}}g(a)\int_{0}^{U} e^{-xu^2+xh(a)}du.$$

定理 32.1 設 $h(t)$ 在 $t=a$ 处有极大值，并且具有二阶連續导函数，又設在 $a<t\leqslant b$ 中 $h(t)<h(a)$，且

$$h'(a)=0,\quad h''(a)<0.$$

此外，設 $g(t)$ 是連續函数，$g(a)\neq 0$。这样就有

$$f(x)\sim\left[\frac{-\pi}{2xh''(a)}\right]^{\frac{1}{2}}g(a)e^{xh(a)}. \tag{32.5}$$

証明 根据中值定理，容易証明存在着正数 η，使得

$$a<t<a+\eta \text{ 时},\quad h'(t)<0.$$

若是选择 η，使得在 $a<t<a+\eta$ 中，$|g(t)|\neq 0$，那么根据上面的証明，就有

$$f(x)\sim\left[\frac{-2}{h''(a)}\right]^{\frac{1}{2}}g(a)e^{xh(a)}\int_0^U e^{-xu^2}du,$$

其中

$$U=[h(a)-h(a+\eta)]^{\frac{1}{2}}.$$

但是

$$\int_0^U e^{-x^2u}du=\int_0^\infty e^{-x^2u}du-\int_U^\infty e^{-x^2u}du$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}U}^\infty e^{-v^2}dv$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+o(1)\right)\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

于是

$$f(x)\sim\left[\frac{-2}{h''(a)}\right]^{\frac{1}{2}}g(a)e^{xh(a)}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

这就是(32.5)。 証毕

§33 駐点的方法

現在研究一下当 $x\to\infty$ 时，积分

$$f(x)=\int_a^b g(t)e^{ixh(t)}dt \tag{33.1}$$

的情形。設 $h(t)$ 是实数值的函数。满足 $h'(t)=0$ 的点 t 是它的駐点。积分 (33.1) 的值可以从区間端点的近傍和 $h(t)$ 的駐点的近傍去考虑。駐点的近傍所起的作用其实比区間端点的近傍的那一部分更为重要。

設 $g(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 中是連續有界变分函数，$h(t)$ 具有連續的二阶导函数，并且

$$h'(\tau)=0,\quad h''(\tau)>0,\quad a<\tau<b. \tag{33.2}$$

对于其他的 t，有 $h'(t)\neq 0$。在 τ 的近傍，令

$$h(t)-h(\tau)=u^2. \tag{33.3}$$

于是若取相当小的数 ε，$\varepsilon>0$，則有

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} g(t)e^{ixh(t)}dt+\int_{|t-\tau|>\varepsilon} g(t)e^{ixh(t)}\,dt \\ &=I_1+I_2. \end{aligned} \tag{33.4}$$

現在先对 I_2 估計。

假設 $g(t)$ 是单調函数，根据积分中值定理有

$$\begin{aligned} &\int_{\tau+\varepsilon}^{b} g(t)\cos xh(t)\,dt \\ &\quad=g(b)\int_{\xi}^{b}\cos xh(t)\,dt,\quad \tau+\varepsilon<\xi<b, \\ &\quad=g(b)\int_{h(\xi)}^{h(b)}\cos xv\frac{dv}{h'(t)} \\ &\quad=g(b)\frac{1}{h'(b)}\int_{\eta}^{h(b)}\cos xv\,dv,\quad h(\xi)<\eta<h(b). \end{aligned}$$

(因为 $h(t)$ 单調，令 $h(t)=v$ 卽得。)

$$=\frac{g(b)}{h'(b)}\,\frac{1}{x}\Big(\sin xv\Big)_{\eta}^{h(b)}=O\left(\frac{1}{x}\right).$$

同样地有

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{b} g(t)\sin(xh(t))\,dt=O\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

又当 $g(t)$ 是有界变分函数时，这个結果仍然成立，卽

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{b} g(t)e^{ixh(t)}\,dt=O\left(\frac{1}{x}\right).$$

同样地能够証明$\int_{a}^{x-\varepsilon}$ 也为 $O(x^{-1})$。故

$$I_2=O(x^{-1}). \tag{33.5}$$

下面再討論积分 I_1。令 $h(t)-h(\tau)=u^2$, 則有

$$I_1=\int_{-u_1}^{u_2} 2u\frac{g(t)}{h'(t)}\exp[ixh(t)+u^2]\,du,$$

这里

$$u_1=[h(\tau-\varepsilon)-h(\tau)]^{1/2},\quad u_2=[h(\tau+\varepsilon)-h(\tau)]^{1/2}.$$

由于

$$\frac{u}{h'(t)}=\frac{(h(t)-h(\tau))^{1/2}}{h'(t)-h'(\tau)}$$

$$=\frac{\left\{(t-\tau)h'(\tau)+\frac{1}{2}(t-\tau)^2h''(\xi_1)\right\}^{1/2}}{R(t-\tau)h''(\xi_2)}$$

$$=\frac{\{h''(\xi_1)\}^{1/2}}{\sqrt{2}\,h''(\xi_2)}\quad (\xi_1\text{ 与 }\xi_2\text{ 都是 }\tau\text{ 与 }t\text{ 之間的数}),$$

当 $t\to\tau$ 时

$$\frac{u}{h'(t)}\to\frac{1}{\sqrt{2}\,h''(\tau)}.$$

于是

$$\frac{2ug(t)}{h'(t)}\to\left[\frac{2}{h''(\tau)}\right]^{1/2}g(\tau).$$

所以象討論 I_2 时那样,容易証明

$$I_1=\left[\frac{2}{h''(\tau)}\right]^{1/2}g(\tau)\int_{u_1}^{u_2}\exp[ixu^2+ixh(\tau)]\,du+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left[\frac{2}{h''(\tau)}\right]^{1/2}g(\tau)e^{ixh(\tau)}\int_{\to-\infty}^{\to\infty}e^{ixu^2}du$$

$$+O\left[\left(\int_{u_2}^{\infty}+\int_{-\infty}^{u_1}\right)e^{ixu^2}du\right]+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left[\frac{2}{xh''(\tau)}\right]^{1/2}g(\tau)e^{ixh(\tau)}e^{i\pi/4}+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{33.6}$$

但在此处用到了下面的公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu^2}du=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{ixu^2}du=2\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{ixu^2}du$$

$$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{A^2}\frac{e^{ixv}}{\sqrt{v}}dv=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}e^{i\frac{\pi}{4}}. \qquad (33.7)$$

这个公式将在下一节中証明。

由(33.6)及(33.5)就能写出下面的公式

$$f(x)=\left[\frac{2\pi}{xh''(\tau)}\right]^{1/2} g(\tau)\exp\left[i\left(xh(\tau)+\frac{\pi}{4}\right)\right]+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

因为 exp 項的絕对值等于1，所以我們可以把結果述說成为下面的定理。

定理 33.1　設 $g(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 中是有界变分函数，$h(t)$ 在同区間中具有二阶連續导函数。此外 (33.2) 成立，$h'(t)\neq 0$（当 $t\neq\tau$ 时）。那末

$$f(x)\sim\left[\frac{2\pi}{xh''(\tau)}\right]^{1/2}g(\tau)\exp\left[i\left(xh(\tau)+\frac{\pi}{4}\right)\right],\ x\to\infty. \qquad (33.8)$$

再者上面的定理仅是函数在 $[a, b]$ 中具有唯一的駐点的情形，如果它在 $[a, b]$ 中具有有限个駐点的話，那么可以把区間适当的划分，使得划分后在每个区間中仅有唯一的駐点，从而可以考慮积分在各区間內的漸近式[1]。

§34　定　积　分

这一节我們研究形如

$$\int_0^{\infty} e^{-(k+iu)x}x^{\mu-1}dx \quad (k>0)$$

的以及和它有关的积分。

定理 34.1　設 $\mu>0$, $k>0$, $-\infty<u<\infty$, 則

---

[1] 关于定理 33.1 的推广，見 A. Erdélyi: Asymptotic expansions (Dover, 1956), 52.

$$\int_0^\infty e^{-kx}x^{\mu-1}e^{-iux}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{(k+iu)^\mu}. \qquad (34.1)$$

証明 設

$$I(X,\varepsilon)=\int_\varepsilon^X e^{-kx}x^{\mu-1}e^{-iux}dx,$$

并且令 $k+iu=\rho e^{i\theta}$。因为 $k>0$，所以

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

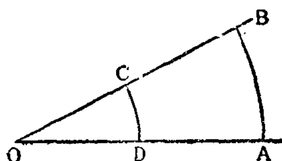


图 34.1

函数

$$\varphi(z)=e^{-kz}z^{\mu-1}e^{-iuz}$$

在图上区域 $ABCD$ 中是单值的解析函数。这里 O 是原点，A 与 D 是实軸上的点，$OA=X$，$OD=\varepsilon$，$\angle AOB=-\theta$. 原点是函数 $\varphi(z)$ 的支点，我們取在实軸上 $\varphi(x)=e^{-kx}x^{\mu-1}e^{-iux}$ 的这个分支。現在 A 就是 X，B 是 $Xe^{-i\theta}$，C是 $\varepsilon e^{-i\theta}$，D 是 ε. AB，CD 分别是圓弧。于是根据 Cauchy 积分定理，有

$$I(X,\varepsilon)=\int_\varepsilon^X\varphi(x)dx=\int_{DC}\varphi(z)dz+\int_{CB}\varphi(z)dz+\int_{BA}\varphi(z)dz$$
$$=I_1+I_2+I_3.$$

首先在 DC 弧上有 $z=\varepsilon e^{i\varphi}$ $(\varphi:0\sim-\theta)$，所以

$$I_1=\varepsilon^\mu i\int_0^{-\theta}\exp(-\rho e^{i\theta}\cdot\varepsilon e^{i\varphi})e^{i(\mu-1)\varphi}d\varphi.$$

于是

$$|I_1|\leqslant\varepsilon^\mu\left|\int_0^{-\theta}\exp[-\rho\varepsilon\cos(\theta+\varphi)]d\varphi\to0\quad(\varepsilon\to0). \qquad (34.2)$$

其次，同样地有

$$|I_3|\leqslant X^\mu\left|\int_0^{-\theta}\exp[-\rho X\cos(\theta+\varphi)]d\varphi\right|.$$

因 $0<\theta+\varphi<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以有 η，使得 $\cos(\theta+\varphi)\geqslant\eta>0$. 于是

$$|I_3|\leqslant X^\mu\int_0^{|\theta|}e^{-\rho\eta X}d\varphi=X^\mu|\theta|e^{-\rho\eta X}\to0\quad(X\to\infty).$$

即

$$I_3 \to 0. \tag{34.3}$$

由(34.2)及(34.3)就有

$$\lim_{X\to\infty,\,\varepsilon\to 0} I(X,\varepsilon)=\lim I_2$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0,\,X\to\infty}\int_\varepsilon^X \exp(-\rho e^{i\theta}ye^{-i\theta})(ye^{-i\theta})^{\mu-1}e^{-i\theta}\,dy$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0,\,X\to\infty} e^{-i\theta\mu}\int_\varepsilon^X y^{\mu-1}e^{-\rho y}dy$$

$$=\rho^{-\mu}e^{-i\theta\mu}\int_0^\infty e^{-w}w^{\mu-1}dw=(k+iu)^{-\mu}\Gamma(\mu).$$

証毕

公式(34.1)說明了一个事实，就是当 $x>0$ 时等于

$$\sqrt{2\pi}\,e^{-kx}x^{\mu-1}\quad (x>0)$$

而当 $x<0$ 时等于零的函数的 Fourier 变换是 $\Gamma(\mu)/(k+iu)^\mu$.

(34.1)的結果可叙述如下。

定理 34.2　設 $\mu>0$, $k>0$, 則

$$\lim_{U\to\infty}\int_{-U}^{U}\frac{e^{iux}}{(k+iu)^\mu}du=\frac{2\pi}{\Gamma(\mu)}e^{-kx}x^{\mu-1},\quad x>0. \tag{34.4}$$

証明　这个公式由于定理 34.1 及反演公式定理 5.1 而明显地成立。当 $\mu>1$ 的时候，可以 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 代替 $\lim\limits_{U\to\infty}\int_{-U}^{U}$.

把积分公式(34.1)分成实部及虛部，就得到

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos ux\cdot x^{\mu-1}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{(k^2+u^2)^{\mu/2}}\cos\left(\mu\tan^{-1}\frac{u}{k}\right), \tag{34.5}$$

$$\int_0^\infty e^{-kx}\sin ux\cdot x^{\mu-1}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{(k^2+u^2)^{\mu/2}}\sin\left(\mu\tan^{-1}\frac{u}{k}\right), \tag{34.6}$$

$$(k>0,\quad \mu>0,\quad -\infty<u<\infty).$$

現在討論一下(34.1)当 $k\to 0$ 时的极限值。設

$$0<\alpha<\frac{1}{\mu+1},\quad 0<\mu<1,$$

于是根据积分学第二中值定理，对于任意的 $A(>k^{-\alpha})$ (因为 $e^{-kx}x^{\mu-1}$ 对于 $x>(\mu+1)k^{-1}$ 是减函数，由于 $\alpha<1$，而 k 相当的小，

所以可以认为当 $x>k^{-\alpha}$ 时函数是减函数),有下面的结果:

$$\begin{aligned}
&\int_{k^{-\alpha}}^{A} e^{-kx}x^{\mu-1}\cos xu\,dx\\
&=\exp(-k^{1-\alpha})k^{-\alpha(\mu-1)}\int_{k^{-\alpha}}^{\xi}\cos xu\,dx,\quad k^{-\alpha}<\xi<A,\\
&=\exp(-k^{1-\alpha})k^{-\alpha(\mu-1)}\left[\frac{\sin xu}{u}\right]_{k^{-\alpha}}^{\xi}\\
&=O(1)\cdot O(k^{(1-\mu)\alpha})=o(1),\quad k\to 0.
\end{aligned}$$

这里的估值对于所有的 A 是一样的,所以

$$\int_{k^{-\alpha}}^{\infty} e^{-kx}x^{\mu-1}\cos xu\,dx=o(1). \tag{34.7}$$

現在再令

$$J=\int_0^{k^{-\alpha}} e^{-kx}x^{\mu-1}e^{-iux}dx-\int_0^{k^{-\alpha}} x^{\mu-1}e^{-iux}dx,$$

則有

$$\begin{aligned}
|J|&\leqslant\int_0^{k^{-\alpha}}(1-e^{-kx})x^{\mu-1}\,dx\\
&\leqslant k\int_0^{k^{-\alpha}} x^{\mu}\,dx=\frac{k^{1-(\mu+1)\alpha}}{\mu+1}=o(1)\qquad(k\to 0).
\end{aligned}$$

(因为 $0<\alpha<(\mu+1)^{-1}$.)

这样再考虑(34.7)就有

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}x^{\mu-1}\cos xu\,dx-\int_0^{k^{-\alpha}} x^{\mu-1}\cos xu\,dx\to 0. \tag{34.8}$$

若是取 $0<A<B$, 則有

$$\int_A^B x^{\mu-1}\cos xu\,dx=\left[\frac{\sin xu}{u}x^{\mu-1}\right]_A^B-\frac{\mu-1}{u}\int_A^B x^{\mu-2}\sin xu\,dx.$$

因为 $\mu<1$, 所以右边的第一项当 $B\to\infty$, $A\to\infty$ 时收斂于零。又因为 $\int_A^B x^{\mu-2}dx\to 0$, 所以积分

$$\int_0^{\to\infty} x^{\mu-1}\cos xu\,dx$$

收斂。故此在(34.8)中取 $k\to 0$, 則有

$$\int_0^{\to\infty} x^{\mu-1}\cos xu\,dx=\lim_{k\to 0}\int_0^{\infty} e^{-kx}x^{\mu-1}\cos xu\,dx. \tag{34.9}$$

这个等式的右边是

$$\lim_{k\to 0}\Gamma(\mu)/(k+iu)^{\mu},$$

令

$$(k+iu)^{\mu}=(k^2+u^2)^{\mu/2}e^{i\theta\mu},\quad \theta=\tan^{-1}(u/k).$$

当 $k\to 0$ 时，由 $u>0$，就得到 $\theta\to\frac{\pi}{2}$，于是 $(k+iu)^{\mu}\to u^{\mu}e^{i\mu\pi/2}$. 这样，由(34.9)就有

$$\int_0^{\to\infty}x^{\mu-1}e^{ixu}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{u^{\mu}}e^{-i\mu\frac{\pi}{2}}\quad(u>0,\ 0<\mu<1). \tag{34.10}$$

由此式就能导出

$$\int_0^{\to\infty}x^{\mu-1}\cos xu\,dx=\frac{\Gamma(\mu)}{u^{\mu}}\cos\frac{\pi\mu}{2}, \tag{34.11}$$

$$\int_0^{\to\infty}x^{\mu-1}\sin xu\,dx=\frac{\Gamma(\mu)}{u^{\mu}}\sin\frac{\pi\mu}{2} \tag{34.12}$$

$$(u>0,\quad 0<\mu<1).$$

当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，因为 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，所以有

$$\int_0^{\to\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{\to\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{34.13}$$

若是在上式中用 ux^2 代替 x，则得到

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\cos(ux^2)dx=\sqrt{\frac{\pi}{2u}},\quad u>0, \tag{34.14}$$

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\tan(ux^2)dx=\sqrt{\frac{\pi}{2u}},\quad u>0, \tag{34.15}$$

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty}e^{iux^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{u}}e^{\frac{\pi i}{4}},\quad u>0. \tag{34.16}$$

这些积分普通叫做 **Fresnel** 积分。

§35 数 值 积 分

考虑求下面形式的积分

$$I=\int_a^b f(u)\cos xu\,du \tag{35.1}$$

的数值問題。当 x 相当大时，因为 $\cos xu$ 急剧地在正負之間振动，所以要用普通的方法，譬如 Simpson 方法等求值，就必須把区間分得非常細小，并作非常麻煩的計算，决不是能够簡单地解决的。这里我們介紹一个計算这种类型积分的特殊方法，这种方法是 Filton 找到的❶。

先把区間 (a, b) 分成 $2n$ 个等分，即

$$b=a+2nh.$$

令

$$xh=\theta,\quad a+sh=u_s,\quad f(a+sh)=f_s. \tag{35.2}$$

在区間 (u_s-h, u_s+h) 即区間 (u_{s-1}, u_{s+1}) 中对 $f(u)$ 使用抛物綫近似法計算，就是取

$$g_s(u)=A+B(u-u_s)+C(u-u_s)^2,$$

并且要求 $g_s(u)$ 在 u_{s-1}, u_s, u_{s+1} 处与 $f(u)$ 相等，这样地来决定 A, B, C，就有

$$\left.\begin{aligned} A&=f_s,\\ B&=\frac{1}{2h}(f_{s+1}-f_{s-1}),\\ C&=\frac{1}{2h^2}(f_{s+1}+f_{s-1}-2f_s). \end{aligned}\right\} \tag{35.3}$$

把 $g_s(u)$ 微分，并令 $u=u_{s+1}, u_{s-1}$，就有

$$g_s'(u_{s+1})=B+2C(u-u_s)=\frac{1}{2h}(3f_{s+1}+f_{s-1}-4f_s),$$

$$g_s'(u_{s-1})=\frac{1}{2h}(4f_s-f_{s+1}-3f_{s-1}). \tag{35.4}$$

現在令

$$I_s=\int_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} f(u)\cos xu\,du.$$

---

❶ 参看 L. N. G. Filton: Proc. Roy. Soc. Edin. XLIX (1928～1929). 又見 C. J. Tranter: Integral transforms in math. phys., 2nd. ed. (1955).

我們先試求积分

$$I_s^*=\int_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} g_s(u)\cos xu\,du.$$

根据分部积分法有

$$\begin{aligned}I_s^*&=\Big[g_s(u)x^{-1}\sin xu\Big]_{u_{s-1}}^{u_{s+1}}-\frac{1}{x}\int_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} g_s'(u)\sin xu\,du\\&=\frac{1}{x}\Big[g_s(u)\sin xu+g_s'(u)x^{-1}\cos xu\Big]_{u_{s-1}}^{u_{s+1}}\\&\quad-\frac{1}{x^2}\int_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} g_s''(u)\cos xu\,du.\end{aligned}$$

因为 $g_s''(u)=2C$，故此

$$xI_s^*=\Big[\{g_s(u)-2Cx^{-2}\}\sin xu+g_s'(u)x^{-1}\cos xu\Big]_{u_{s-1}}^{u_{s+1}}. \quad (35.5)$$

把(35.3)中 C 的值代入，并且考虑

$$\sin xu_{s+1}=\sin x(u_s+h)=\sin xu_s\cos\theta+\cos xu_s\sin\theta,$$

$$\sin xu_{s-1}=\sin x(u_s-h)=\sin xu_s\cos\theta-\cos xu_s\sin\theta,$$

就得

$$\begin{aligned}\Big[\{g_s(u)-2Cx^{-2}\}\sin xu\Big]_{u_{s-1}}^{u_{s+1}}&=(f_{s+1}-f_{s-1})\sin xu_s\cos\theta\\&\quad+\{(1-2\theta^{-2})(f_{s+1}+f_{s-1})+4\theta^{-2}f_s\}\cos xu_s\sin\theta.\end{aligned}$$

同样地

$$\begin{aligned}\Big[g_s'(u)x^{-1}\cos xu\Big]_{u_{s-1}}^{u_{s+1}}&=2\theta^{-1}(f_{s+1}+f_{s-1}-2f_s)\cos xu_s\cos\theta\\&\quad-\theta^{-1}(f_{s+1}-f_{s-1})\sin xu_s\sin\theta.\end{aligned}$$

把两式相加，就有

$$\begin{aligned}x\theta I_s^*&=(f_{s+1}-f_{s-1})(\theta\cos\theta-\sin\theta)\sin xu_s\\&\quad+(f_{s+1}+f_{s-1})(\theta\sin\theta-2\theta^{-1}\sin\theta+2\cos\theta)\cos xu_s\\&\quad+4f_s(\theta^{-1}\sin\theta-\cos\theta)\cos xu_s.\end{aligned}$$

由于 $xu_s=xu_{s+1}-\theta$，所以这个式子中 f_{s+1} 的系数是

$$\begin{aligned}&(\theta\cos\theta-\sin\theta)\sin(xu_{s+1}-\theta)\\&\quad+(\theta\sin\theta-2\theta^{-1}\sin\theta+2\cos\theta)\cos(xu_{s+1}-\theta)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(\theta\sin\theta\cos\theta-2\theta^{-1}\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta-\theta\sin\theta\cos\theta\\
&\quad+\sin^2\theta)\cos xu_{s+1}+(\theta\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\theta\sin^2\theta\\
&\quad-2\theta^{-1}\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta)\sin xu_{s+1}\\
&=(1+\cos^2\theta-2\theta^{-1}\sin\theta\cos\theta)\cos xu_{s+1}\\
&\quad+(\theta+\sin\theta\cos\theta-2\theta^{-1}\sin^2\theta)\sin xu_{s+1}.
\end{aligned}
$$

同样地，利用 $xu_s=xu_{s-1}+\theta$，可以得到 f_{s-1} 的系数是

$$
\begin{aligned}
&(1+\cos^2\theta-2\theta^{-1}\sin\theta\cos\theta)\cos xu_{s-1}\\
&\quad-(\theta+\sin\theta\cos\theta-2\theta^{-1}\sin^2\theta)\sin xu_{s-1}.
\end{aligned}
$$

于是，如果令

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha&=\theta^{-3}(\theta^2+\theta\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta),\\
\beta&=2\theta^{-3}[\theta(1+\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta],\\
\gamma&=4\theta^{-3}(\sin\theta-\theta\cos\theta),
\end{aligned}\right\}\tag{35.6}
$$

则由于 $h=\theta/x$，能够有下面的公式：

$$
\begin{aligned}
I_s^*=h[&\alpha(f_{s+1}\sin xu_{s+1}-f_{s-1}\sin xu_{s-1})\\
&+\frac{1}{2}\beta(f_{s+1}\cos xu_{s+1}+f_{s-1}\cos xu_{s-1})+\gamma f_s\cos xu_s].
\end{aligned}
$$

现在令 $s=1,3,5\cdots,2n-1$，并且把这些 I_s^* 相加，就得到总和

$$
h[\alpha\{f(b)\sin xb-f(a)\sin xa\}+\beta C_{2s}+\gamma C_{2s-1}].
$$

其中

$$
\begin{aligned}
C_{2s}=\frac{1}{2}f_0\cos xa+f_2\cos xu_2+f_4\cos xu_4+\cdots&\\
+f_{2n-2}\cos xu_{2n-2}+\frac{1}{2}f_{2n}\cos xb.&
\end{aligned}\tag{35.7}
$$

$$
C_{2s-1}=f_1\cos xu_1+f_3\cos xu_3+\cdots+f_{2n-1}\cos xu_{2n-1}.\tag{35.8}
$$

上面的公式显然就是 I_3 的和，也就可以看成是积分

$$
\int_a^b f(u)\cos xu\,du
$$

的近似值。这样就得到了下面的定理。

定理 35.1 成立着近似公式

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(u)\cos xu\,du=h[&\alpha\{f(b)\sin xb-f(a)\sin xa\}\\
&+\beta C_{2s}+\gamma C_{2s-1}].
\end{aligned}\tag{35.9}
$$

这里的 C_{2s}, C_{2s-1} 分别如公式(35.7)和(35.8), α, β, γ 如公式(35.6), 此外 $b-a=2nh$.

注意 若是 $x\to 0$, 则 $\theta\to 0$, (35.9)就成为

$$\int_a^b f(u)\,du=\frac{h}{3}(2C_{2s}+4C_{2s-1}),$$

这就是 Simpson 公式。α, β, γ 的值見表35.1。(Filton)

表 35.1

θ	α	β	γ
0.0	0.00000	0.66667	1.33333
0.025	0.00000	0.66675	1.33325
0.05	0.00001	0.66700	1.33300
0.10	0.00004	0.66800	1.33200
0.15	0.00015	0.66965	1.33034
0.20	0.00035	0.67194	1.32801
0.25	0.00069	0.67485	1.32502
0.30	0.00118	0.67836	1.32137
0.40	0.00278	0.68704	1.31212
0.50	0.00536	0.69769	1.30030
0.75	0.01730	0.73022	1.25982
1.00	0.03850	0.76526	1.20467
1.50	0.10840	0.80971	1.05646

第7章　表現問題与調和分析

§36　使用 Fourier 积分的表現

設 $F(t)$ 是定义于$(-\infty, \infty)$中的函数，我們来求这个函数能够表現成为

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)dx, \tag{36.1}$$

或是

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}dG(x) \tag{36.2}$$

的充要条件。这里 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，$G(x)$是有界变分函数。若是 $F(x)\in L_2(-\infty, \infty)$，那么根据 L_2-Fourier 变换的反演公式，这个問題明显地可以归結为求(逆) Fourier 变换的問題。故此現在仅考虑(36.1)中当 $f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$的情形。

設 $s(t)$ 是滿足下面(36.3)～(36.6)这些条件的函数：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|dt<M \quad (M\text{: 常数}), \tag{36.3}$$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}K(x)dx, \tag{36.4}$$

其中 $K(x)$是非負偶函数(实函数値)，并且当 $|x|\to\infty$ 时，

$$K(x)=O(|x|^{-1-\alpha}),\ \alpha>0. \tag{36.5}$$

$$s(0)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx=1. \tag{36.6}$$

这样的$s(t)$，譬如可以取成 $D_2(t)$：$D_2(t)=0$ $(|t|\geqslant 2)$，$D_2(t)=1-\frac{|t|}{2}$ $(|t|\leqslant 2)$. 另外根据(36.3)与(36.4)有

$$K(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}s(t)dt \ (\text{对于几乎所有的 } x). \tag{36.7}$$

这个公式成立的理由如下：首先右边的积分絕对收斂，另外根据定理11.1，有

$$(C,1)\frac{1}{2\pi}\int_{\to-\infty}^{\to\infty}e^{-itx}s(t)\,dt=K(x)\quad(\text{对于几乎所有的 }x).$$

于是(36.7)右边积分的值，几乎处处都等于 $K(x)$。

由于(36.7)，我們不妨認为 $K(x)$ 是連續而且有界的。現在我們作

$$f(n,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}s\left(\frac{t}{n}\right)F(t)\,dt. \tag{36.8}$$

因为 $F(t)$ 有界，所以右边的积分絕对收斂。

定理 36.1　有界函数 $F(t)$ 可以用 (36.1) 表現的充分必要条件[其中 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$]是

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(n,x)|\,dx\leqslant M,\quad n=1,2,\cdots, \tag{36.9}$$

并且，对于已給的 ε，存在着这样的 δ，$\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对于任意一个測度小于 δ 的集合 S，恒有

$$\int_S|f(n,x)|\,dx\leqslant\varepsilon. \tag{36.10}$$

証明　(i) 条件是必要的。若是(36.1)成立，則

$$\begin{aligned}f(n,x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}s\left(\frac{t}{n}\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{ity}f(y)\,dy\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it(x-y)}s\left(\frac{t}{n}\right)dt\\&=\frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itn(x-y)}s(t)\,dt\\&=n\int_{-\infty}^{\infty}K(n(x-y))f(y)\,dy.\end{aligned} \tag{36.11}$$

于是

$$|f(n,x)|\leqslant n\int_{-\infty}^{\infty}K(n(x-y))\,|f(y)|\,dy,$$

并且

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(n, x)|dx \leqslant n\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}K(n(x-y))|f(y)|dy$$

$$=n\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|dy\int_{-\infty}^{\infty}K(n(x-y))dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|dy\int_{-\infty}^{\infty}K(z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|dy. \qquad (36.12)$$

把最右边取成 M 后，就得到(36.9)。

其次，設 $f(y)=f_1(y)+if_2(y)$，并令

$$f_i(n, x)=n\int_{-\infty}^{\infty}K(n(x-y))f_i(y)dy \quad (i=1, 2),$$

根据定理 10.1，对于几乎所有的 x，$f_i(n,x)$ 收斂于 $f_i(x)$. 所以不妨設 $f_i(x)\geqslant 0$，因为若不是这样的話，那么令 $f_i(x)=f_i^+(x)-f_i^-(x)$ $(f_i^+\geqslant 0, f_i^-\geqslant 0)$，而同样地定义 $f_i^+(n, x)$ 和 $f_i^-(n, x)$ 卽可。于是(36.12)就可以写成下面的等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_i(n, x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_i(x)dx=J_i \quad (i=1, 2).$$

現在令
$$H_i(n, x)=\int_{-\infty}^{x}f_i(n, x)dx,$$

因为 $H_i(n, x)$ 是非减函数，所以 $H_i(n, \infty)=J_i$（与 n 无关系）。又因为 $f_i(n, x)\to f_i(x)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}H_i(n, x)=H_i(x).$$

再取这样的 x_0，使得当 $x\geqslant x_0$ 时，

$$H_i(x)\geqslant J_i-\frac{1}{2}\varepsilon,$$

以及这样的 n_0，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，

$$|H_i(n, x_0)-H_i(x_0)|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

于是当 $n\geqslant n_0$ 及 $x\geqslant x_0$ 时，有

$$0\leqslant J_i-H_i(n, x)\leqslant J_i-H_i(n, x_0)$$
$$\leqslant J_i-H_i(x_0)+H_i(x_0)-H_i(n, n_0)\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

同样地决定 n_1 和 x_0，使得当 $n \geqslant n_1$, $x \leqslant -x_0$ 时，有

$$0 \leqslant H_i(n, x) \leqslant \varepsilon.$$

然后再把区間 $(\varepsilon_1, J-\varepsilon)$ m 等分，使得每一个分区間的长度不超过 ε。設 N 条曲綫 $y=H_i(n, x)$, $n \leqslant N$ ($N=\max(n_0, n_1)$)，与 m 条和 x-軸平行的直綫 $y=\varepsilon+k\dfrac{J_i-2\varepsilon}{m}$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 相交，交点的 x 坐标是 $x_1, x_2\cdots$（不超过 Nm 个）。如果令 $x_{j+1}-x_j$ 的正的最小值是 $\delta_i(\varepsilon)$，則当 $|x-x'|<\delta_i$ 时，明显地成立

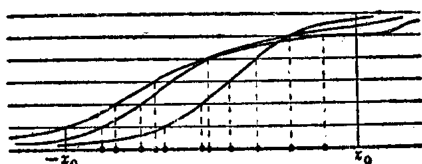


图　36.1

$$|H_i(n, x)-H_i(n, x')|<\varepsilon.$$

于是設 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$, $mS<\delta$ (mS 是集合 S 的測度)，則

$$\int_S f_i(n, x)dx<\varepsilon \quad (i=1, 2).$$

所以 $H_i(n, x)$ 是一致地絕对連續的，也就是說积分

$$\int_{-\infty}^{x} |f(n, x)|dx$$

一致地絕对連續，卽(36.10)成立。

(ii) 条件的充分性。由于公式(36.8)，以及关于 $f(n, x)$ 可积分性的(36.9)，就有

$$s\left(\frac{t}{n}\right)F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(n, x)e^{itx}dx \quad (\text{对于几乎所有的 } t). \tag{36.13}$$

由于右边明显地是連續的，所以可把 $F(t)$ 考虑成为連續函数。[正确地說，存在着一个連續函数 $F^*(t)$，对于几乎所有的 t, $F(t)$ 与 $F^*(t)$ 一致，故我們可以代替 $F(t)$ 而考慮 $F^*(t)$。] $s(t)$ 根据(36.4)是連續的。如在(36.13)中取 $n\to\infty$，則可以看到公式的左边在任意的有限区間中一致收斂于 $F(t)$。

現在一方面由于(36.9)，函数

$$H(n, x)=\int_{-\infty}^{x} f(n, \xi) d\xi$$

在 $(-\infty, \infty)$ 中一致地是有界变分函数。于是有这样一个数列 $n_1, n_2, \cdots$，使得极限函数

$$\lim_{k\to\infty} H(n_k, x)=H(x) \tag{36.14}$$

存在，而 $H(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 中仍是有界变分函数。因此积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(n_k, x) dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dH(n_k, x)$$

当 $k\to\infty$ 时，在任意的有限区間中一致收斂于积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dH(x)$。这个事实可以由 $H(n_k, -\infty)=0$, $H(n_k, \infty)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ 及定理 18.3 証得。于是有

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dH(x).$$

此外，根据假設(36.11)，$H_n(x)$ 是一致連續的，所以 $H(x)$ 也是一致連續的，即存在着 $f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$，使得

$$H(x)=\int_{-\infty}^{x} f(\xi) d\xi.$$

因此

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

証毕

定理 36.1 是由 Cramér 和 Domingnez 所得到的[1]。

現在我們簡略地討論一下定理 36.1 的特殊情形。如果令

$$s(t)=\begin{cases} 1-|t|, & |t|\leqslant 1, \\ 0, & |t|\geqslant 1, \end{cases}$$

那么只要假定 $F(t)$ 在任意有限区間中的可积分性就够了，而不必

---

[1] Cramér 不用条件(36.9)而使用下面的条件(36.15)証明了定理。見 H. Cramér: Trans, Amer. Math. Soc., 46(1939), A. G. Domingnez: Duke Math. Journal 6 (1940).

再假定它是有界的。这样就包括了下面的結果：

定理 36.2[1] 設函数 $F(t)$ 在任意的有限区間上可积分，并且滿足条件(36.9)及(36.10)，則

$$F(t)=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\left(1-\frac{|x|}{A}\right)e^{itx}f(x)\,dx.$$

定理 36.3 定理 36.1 中的条件(36.10)可以改換成

$$\lim_{n,\,n'\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(n,\,x)-f(n',\,x)|\,dx=0. \tag{36.15}$$

証明 (36.15)是必要的。因为

$$f(n,\,x)-f(x)=n\int_{-\infty}^{\infty}K(nz)\,[f(x-z)-f(x)]\,dz.$$

所以

$$|f(n,\,x)-f(x)|\leqslant n\int_{-\infty}^{\infty}K(nz)\,|f(x-z)-f(x)|\,dz.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(n,\,x)-f(x)|\,dx$$
$$\leqslant n\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-z)-f(x)|\,dx\right]K(nz)\,dz. \tag{36.16}$$

但是 $$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-z)-f(x)|\,dx=\varphi(z)$$

是有界而連續的函数，并且 $\varphi(0)=0$，所以根据定理 8.1，(36.16)的右边当 $n\to\infty$ 时收斂于零，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(n,\,x)-f(x)|\,dx\to 0\,.$$

由这个公式就能得到(36.15)。

(36.15)是充分的。和定理 36.1 的証明一样，有

$$H(x)=\lim_{k\to\infty}\int_{\to\infty}^{x}f(n_k,\,x)\,dx. \tag{36.17}$$

由(36.15)可以知道，存在着这样一个函数 $f(x)\in L_1(-\infty,\,\infty)$，使得

---

[1] 这个定理是由 A. C. Offord 得到的。

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f(n_k, x)|dx=0.$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{x}f(n_k, \xi)\,d\xi=\int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi,$$

因此，对于几乎所有的 x 成立着

$$H(x)=\int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi.$$

这样，由上式就能导出定理 36.1 的結論。 証毕

另外在定理 36.1 的証明中还包含有下面的定理。

定理 36.4 有界函数 $F(t)$ 可以用(36.2)表現[其中 $G(x)$ 是在 $(-\infty, \infty)$ 中的有界变分函数]的充分和必要条件是存在着与 n 无关的数 M，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(n, x)|dx<M. \tag{36.18}$$

最后举几个关于 $s(t)$ 与 $K(x)$ 的例子。

$s(t)$,	$K(x)$
$e^{-t^2/2}$,	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$
$e^{-\|t\|}$,	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$
$1-\|t\|\ (\|t\|\leqslant 1)$ $0\ (\|t\|\geqslant 1)$,	$\dfrac{1-\cos x}{\pi x^2}$.

§ 37 使用 Fourier-Stieltjes 积分的表現

在本节中考慮 $f(t)$ 可以表現为

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x) \tag{37.1}$$

的条件，其中 $F(x)$ 是单調增函数。

和前节一样，假設 $s(t)$ 滿足 (36.3)，(36.4)，(36.5)，(36.7)，并令

$$F(n,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\,s\left(\frac{t}{n}\right)f(t)\,dt. \qquad (37.2)$$

这样就得到下面的定理。

定理 37.1[1] 如果$f(t)$是有界的連續函数，那么它可以用(37.1)表現的充分必要条件是

$$F(n,x)\geqslant 0, \qquad (37.3)$$

这里$F(x)$是有界的单調增函数。

証明 条件的必要性。如果(37.1)成立的話，那么

$$\begin{aligned}F(n,x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\,s\left(\frac{t}{n}\right)dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{ity}dF(y)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dF(y)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it(x-y)}\,s\left(\frac{t}{n}\right)dt\\&=n\int_{-\infty}^{\infty}K(n(x-y))\,dF(y).\end{aligned}$$

最后的式子，因为$K(x)\geqslant 0$，所以不可能取負的値。

現在証明条件的充分性。因为

$$\int_{-2A}^{2A}\left(1-\frac{|x|}{2A}\right)e^{-itx}dx=2A\left(\frac{\sin At}{At}\right)^2,$$

把方程的两边乘以$(2\pi)^{-1}\,s\left(\frac{t}{n}\right)f(t)$，然后再积分，就有

$$\int_{-2A}^{2A}\left(1-\frac{|x|}{2A}\right)F(n,x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 s\left(\frac{t}{nA}\right)f\left(\frac{t}{A}\right)dt. \qquad (37.4)$$

$|s(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}K(x)\,dx=1$。又$f(t)$有界，故可設$|f(t)|\leqslant M$。所以(37.4)的右边不可能超过$M\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt=M$，因此有

$$\int_{-2A}^{2A}\left(1-\frac{|x|}{2A}\right)F(n,x)\,dx\leqslant M.$$

---

[1] H. Cramér: On the representation of a function by certain Fourier integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 46 (1936).

于是由(37.3)有

$$\frac{1}{2}\int_{-A}^{A}F(n,x)dx\leqslant\int_{-A}^{A}\left(1-\frac{|x|}{2A}\right)F(n,x)dx$$
$$\leqslant\int_{-2A}^{2A}\left(1-\frac{|x|}{2A}\right)F(n,x)dx\leqslant M.$$

即 $\int_{-\infty}^{\infty}F(n,x)\,dx\leqslant 2M$。这就意味着 $F(n,x)\in L_1(-\infty,\infty)$。于是由(37.2)有

$$s\left(\frac{t}{n}\right)f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}F(n,x)dx. \qquad (37.5)$$

当 $n\to\infty$ 时，方程的左边趋于 $f(t)$. 右边可以看成是

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}d\left(\int_{-\infty}^{x}F(n,y)dy\right),$$

而这个式子当 $n\to\infty$ 时收斂 $\left[\int_{-\infty}^{\infty}F(n,y)dy=f(0)\text{与 } n \text{ 无关}\right]$，所以根据定理 18.2，积分 $\int_{-\infty}^{x}F(n,y)dy$ 收斂于一个单調函数 $F(x)$，因此在(37.5)中取 $n\to\infty$，就得到

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x). \qquad \text{証毕}$$

下面叙述一个和上面同类型的定理。

定理 37.2[1] 設 $f(x)$ 是連續函数，$f(0)=M$，并且存在着 R_0，使得对所有的 x 及 $R\geqslant R_0$ 有

$$\int_{-R}^{R}f(t)e^{-itx}dt\geqslant 0, \qquad (37.6)$$

那么 $f(t)$ 能用 (37.1) 表現。此外，若 $f(t)$ 是具有上述性质的函数序列在任意有限区間中一致收斂的极限函数，則它就也能用(37.1)式表現。并且有 $F(\infty)-F(-\infty)=C$. 反过来，对于可以用(37.1)表現的函数 $f(t)$，一定存在着这样的 R_0，使得当 $R\geqslant R_0$ 时(37.6)成立；或者 $f(t)$ 是一个具有这种性質的函数序列在任意

[1] 河田龙夫: Representation of a function by the Fourier-Stieltjes integral, Ann. Inst. Stat. Math., I (1950).

有限区間中的极限函数。

証明　先証明定理的前半部。令

$$f_R(t)=\begin{cases}f(t), & |t|\leqslant R,\\ 0, & |t|>R,\end{cases}$$

則 f_R 在区間 $(-R, R)$ 中为連續函数，于是根据定理 11.1，有

$$f_R(x)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left(1-\frac{|u|}{A}\right)e^{-ixu}du\int_{-\infty}^{\infty}f_R(t)e^{-iyt}dt. \quad (37.7)$$

此外由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_R(t)e^{-iut}dt=\int_{-R}^{R}f(t)e^{-iut}dt\geqslant 0 \quad (R\geqslant R_0),$$

所以

$$f_R(0)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left(1-\frac{|u|}{A}\right)du\int_{-\infty}^{\infty}f_R(t)e^{-iyt}dt$$

$$\geqslant\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\left(1-\frac{u}{A}\right)du\int_{-\infty}^{\infty}f_R(t)e^{-iyt}dt$$

$$\geqslant\lim_{A\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{A}{2}}^{A}du\int_{-\infty}^{\infty}f_R(t)e^{-iyt}dt.$$

因此函数 $\varphi_R(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_R(t)e^{-ity}dt\in L_1(-\infty, \infty)$. 而积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}du\int_{-\infty}^{\infty}f_R(t)e^{-iut}dt$$

是存在的。这样，根据(37.7)它应該等于 $f_R(t)$. 即

$$f_R(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_R(u)e^{ixu}du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}dF_R(u).$$

这里　$F_R(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{u}\varphi_R(y)dy$, $F_u(\infty)-F_u(-\infty)=f_R(0)$

$$=f(0)=M.$$

因为当 $R\to\infty$ 时，$f_R(t)$ 在任意的有限区間中一致收斂于函数 $f(t)$，所以根据定理 18.2，$F_R(u)$ 收斂于一个有界单調函数 $F(u)$，$(F(a)-F(-\infty)=M)$. 因此成立

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu}dF(u). \tag{37.8}$$

此外，对于这种性质的函数在任意有限区間的极限函数，重复地应用定理 37.2，就可以証明，极限函数也能用(37.8)的形式表現。

下面証明定理的后半部。

現在假設(37.8)成立。令

$$\varphi_A(t)=\begin{cases}1-\dfrac{|t|}{A}, & |t|\leqslant A,\\ 0, & |t|\geqslant A,\end{cases}$$

則

$$\varphi_A(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(Au/2)}{Au^2/2}e^{itu}du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}dF_A(u),$$

这里

$$F_A(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{u}\frac{\sin^2(Av/2)}{Av^2/2}du,\ F_A(+\infty)-F_A(-\infty)=1.$$

明显地有下面的結果

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}d\left(\int_{-\infty}^{\infty}F_A(x-u)dF(u)\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dF(u)\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\,dF_A(x-u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}dF(u)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x-u)t}dF_A(x-u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}dF(u)\int_{-\infty}^{\infty}e^{ivt}dF_A(v)=f(t)\varphi_A(t).$$

因为 $\varphi_A(t)f(t)$ 在任意有限区間中当 $R\to\infty$ 时一致收斂于 $f(t)$，所以把 A 取成 R_0，当 $R\geqslant A$ 时，只要証明

$$\int_{-R}^{R}e^{-ixt}\varphi_A(t)f(t)dt\geqslant 0 \tag{37.9}$$

即可。事实上，

$$\int_{-R}^{R}e^{-ixt}\varphi_A(t)f(t)dt=\int_{-A}^{A}e^{-ixt}\left(1-\frac{|t|}{A}\right)f(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dF(u)\int_{-A}^{A}\left(1-\frac{|t|}{A}\right)e^{-it(x-u)}du$$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(A(x-u)/2)}{A(x-u)^2/2}dF(u)\geqslant 0.$$

于是(37.9)得証。　　　　　　　　　　　　　　　　　証毕

在講定理37.3以前，我們先介紹一个名詞。設 $f(t)$ 在 $-\infty<t<\infty$ 中連續。若对任何一个只在有限区間中不等于零的可积函数 $q(x)$ 恒有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)q(x)\overline{q(y)}dx\,dy\geqslant 0, \qquad (37.10)$$

那么就称 $f(t)$ 为**正值函数**。积分(37.10)的积分区域，实际上只是有限的正方形。

定理 37.3　$f(t)$ 为正值函数的充分必要条件是，$f(t)$ 可以用公式(37.1)表現。

証明　条件是充分的。若是(37.1)成立，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)q(x)\overline{q(y)}dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x-y)u}dF(u)\right)q(x)\overline{q(y)}dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dF(u)\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}q(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iyu}\overline{q(y)}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|Q(u)|^2dF(u)\geqslant 0,$$

这里

$$Q(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}q(x)dx.$$

条件是必要的。設公式(37.10)成立。現在特别取 $q(x)$ 如下，

$$q(x)=\begin{cases}A^{-1/2}e^{-ixt}, & 0\leqslant x\leqslant A,\\ 0, \quad x<0, & x>A.\end{cases}$$

于是(37.10)就化成了下面的形式：

$$0\leqslant\frac{1}{A}\int_0^A\int_0^A f(x-y)\,e^{-i(x-y)t}\,dx\,dy$$
$$=\frac{1}{A}\int_0^A dy\int_0^{A-y}f(u)\,e^{-iut}du$$
$$=\int_{-A}^{A}\left(1-\frac{|u|}{A}\right)f(u)\,e^{-iut}du. \tag{37.11}$$

現在令
$$f(t,A)=\begin{cases}f(t)\left(1-\dfrac{|t|}{A}\right), & |t|\leqslant A,\\ 0, & |t|>A.\end{cases}$$

由于(37.11)，当 $R\geqslant A$ 时，有
$$\int_{-R}^{R}f(t,A)\,e^{-ixt}dt\geqslant 0.$$

因此 $f(t)$ 是函数 $f(t,A)$ 在任意有限区間中所一致收斂的极限函数，据定理 37.2，$f(t)$ 可以用(37.1)来表現。　　証毕

§38 一般調和分析

对于已給的 $f(t)$，設
$$\varphi(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x+t)\overline{f(t)}\,dt \tag{38.1}$$
关于 x 在任意的有限区間中是一致存在的，并且
$$\varphi(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt. \tag{38.2}$$

由于 $|\varphi(x)|\leqslant\varphi(0)$，所以 $\varphi(x)$ 有界。把 $f(t)$ 看作是随时間变动而变化的函数，那么(38.1)就是函数在时間 t 的值与在时間 $x+t$ 的值的积对于时間的平均值。这个值可以看作是在 $x+t$ 及 t 处，函数 的自身的相关系数。我們現在証明，$\varphi(x)$ 可以用 Fourier-Stieltjes 积分来表現。换一句話說，就是可以对它进行調和分析。

設
$$f_A(x)=\begin{cases}f(x), & |x|<A,\\ 0, & |x|\geqslant A.\end{cases} \tag{38.3}$$

令
$$\varphi_A(x)=\frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{\infty}f_A(x+t)\overline{f_A(t)}dt, \tag{38.4}$$
則
$$|\varphi_A(x)|\leqslant\varphi_A(0). \tag{38.5}$$
又在任意的有限区間中，
$$\lim_{A\to\infty}\varphi_A(x)=\varphi(x) \tag{38.6}$$
是一致收斂的。这里 $\varphi(x)$ 是 (38.1) 所定义的函数。現在先对后两个断語加以証明。因为

$$|\varphi_A(x)|=\frac{1}{2A}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f_A(x+t)\overline{f_A(t)}dt\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2A}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_A(x+t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_A(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{\infty}|f_A(t)|^2dt=\varphi_A(0).$$

这就是不等式(38.5)。当 $x>0$ 时，我們有

$$\varphi_A(x)=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A-x}f(x+t)\overline{f(t)}dt$$
$$=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}f(x+t)\overline{f(t)}dt-\frac{1}{2A}\int_{A-x}^{A}f(x+t)\overline{f(t)}dt. \tag{38.7}$$

又

$$\frac{1}{2A}\left|\int_{A-x}^{A}f(x+t)\overline{f(t)}\,dt\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2A}\left(\int_{A}^{A+x}|f(x)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_{A-x}^{A}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}$$
$$\leqslant\frac{1}{2A}\int_{A-x}^{A+x}|f(t)|^2dt. \tag{38.8}$$

可是积分
$$\frac{1}{2(A+x)}\int_{-A-x}^{A+x}|f(t)|^2dt$$
当 $A\to\infty$ 时，根据假設应該收斂于 $\varphi(0)$，于是
$$\frac{1}{2A}\int_{-A-x}^{A+x}|f(t)|^2dt\to\varphi(0).$$ （在 x 的有限区間中一致收斂。）

同样地

$$\frac{1}{2A}\int_{-A+x}^{A-x}|f(t)|^2dt\to\varphi(0).\quad(\text{在 } x \text{ 的有限区間中一致收斂。})$$

于是

$$\frac{1}{2A}\int_{A-x}^{A+x}|f(t)|^2dt+\frac{1}{2A}\int_{-A-x}^{-A+x}|f(t)|^2dt\to 0.$$

因此(38.8)的右边，当 $A\to\infty$ 时，对于任意有限区間中的 x 一致地收斂于零。于是

$$\frac{1}{2A}\int_{A-x}^{A}f(x+t)\overline{f(t)}\,dt\to 0.\quad(\text{在 } x \text{ 的有限区間中一致收斂。})$$

同样地，如果令 $x<0$，这样的关系仍然成立。于是(38.7)右边的第二項收斂于零，而第一項收斂于 $\varphi(x)$．所以由(38.7)就得到了(38.6)。

若 $q(x)$ 是只在任意有限区間中异于零的可积函数，则

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_A(x-y)q(x)\overline{q(y)}\,dx\,dy\\
&=\frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_A(x-y+t)\overline{f_A(t)}\,dt\cdot q(x)\overline{q(y)}\,dx\,dy\\
&=\frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}q(x)\overline{q(y)}\,dx\,dy\int_{-\infty}^{\infty}f_A(x+t)\overline{f_A(y+t)}\,dt\\
&=\frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}q(x)\overline{q(y)}f_A(x+t)\overline{f_A(y+t)}\,dx\,dy\right)dt\\
&=\frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}q(x)f_A(x+t)\,dx\right|^2dt\geqslant 0.
\end{aligned}$$

于是根据定理37.3就知道存在着非减有界函数 $\sigma_A(y)$，使得

$$\varphi_A(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixy}\,d\sigma_A(y).\tag{38.9}$$

这样，再根据定理18.2，就存在一个非减函数 $\sigma(y)$，使得

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixy}\,d\sigma(y).\tag{38.10}$$

这样就得到了下面的定理。

定理 38.1　設 $f(t)$ 是(38.1)中的函数，$\varphi(x)$ 是用(38.1)定义的函数，則存在一个非减函数 $\sigma(y)$，使得(38.10)成立。

定理 38.2　在上面定理的假設下，有

$$\sigma(y)-\sigma(0)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{1-e^{-ixt}}{ix}\varphi(x)dx. \tag{38.11}$$

其中 $\sigma(y)=\frac{1}{2}\{\sigma(y+0)+\sigma(y-0)\}$. 此外有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi(x)e^{-ixy}dx=\sigma(y+0)-\sigma(y-0). \tag{38.12}$$

这个定理是定理 38.1，定理 17.2，定理 16.2 的直接結果。

第8章　結合函数及各种变換

§39 符号解法与結合函数❶

在§6中已經讲过关于两个函数的結合函数。設$f(x)$，$g(x)$是两个已知函数，并設

$$f=\phi*g,\ \text{即}\ f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-y)g(y)dy.$$

現在我們討論一下如何求函数$\phi(x)$的問題。为了这个目的，我們用符号解法来談是比較便利的。設D代表对x微分的运算符号。我們把D設想成为数，并且形式地考虑函数e^{aD}的展开式，就有

$$e^{aD}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^kD^k}{k!}.$$

由此就有下面的展开形式：

$$e^{aD}\phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^kD^k\phi(x)}{k!}.$$

这里如果令$D^k\phi(x)=\phi^{(k)}(x)$，則有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k\phi^{(k)}(x)}{k!}.$$

若$\phi(x)$是正則的，那么根据 MacLaurin 的展开公式，它恰好等于$\phi(x+a)$。于是可以定义

$$e^{aD}\phi(x)=\phi(x+a). \tag{39.1}$$

假如$\phi(x)$不可微分的話，那么就把(39.1)看作是$e^{aD}\phi(x)$的定义。

---

❶ 本章討論的內容，見 D. V. Widder: The convolution transform, Bull. Amer. Math. Soc. (1954); I. I. Hirschman-D. V. Widder: The convolution transform (Princeton Univ. Press, 1955).

現在我們用符号解法来解微分方程

$$f(x)-f'(x)=\phi(x). \tag{39.2}$$

使用 D 后，方程就化成了

$$(1-D)f(x)=\phi(x),$$

因而形式地得到

$$f(x)=\frac{1}{1-D}\phi(x). \tag{39.3}$$

現在我們来規定 $1/(1-D)$ 的意义。設

$$g(y)=\begin{cases} e^y, & -\infty<y<0, \\ 0, & y>0, \end{cases} \tag{39.4}$$

并設 $x<1$，則有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy}g(y)dy=\int_{-\infty}^{0} e^{(-x+1)y}dy=\frac{1}{1-x}.$$

于是把 x 代成 D，就有

$$\frac{1}{1-D}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-yD}g(y)dy,$$

因此

$$\frac{1}{1-D}\,\phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-yD}\phi(x)\cdot g(y)dy.$$

应用(39.1)，就有

$$\frac{1}{1-D}\,\phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-y)g(y)dy=\phi*g.$$

所以由(39.3)就得到

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-y)g(y)dy. \tag{39.5}$$

这样，我們有理由猜想，函数 $f(x)$ 就是(39.2)的解。事实上，(39.5)意味着

$$f(x)=\int_{-\infty}^{0}\phi(x-y)e^y dy=e^x\int_{x}^{\infty}\phi(u)e^{-u}du.$$

这里要假設 $\phi(u)e^{-u}\in L(a,\infty)$ (a 任意的有限数)。把两边微分后，就有

$$f'(x)=e^x\int_x^\infty \phi(u)e^{-u}du-\phi(x).$$

所以
$$f'(x)=f(x)-\phi(x).$$
即(39.2)式确实成立。

現在我們考虑一般的微分方程

$$E(D)f(x)=\phi(x) \tag{39.6}$$

的解的求法。为了这个目的，我們試求 $G(t)$，使得它能满足

$$\frac{1}{E(x)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-xt}G(t)\,dt.$$

如果得到了 $G(t)$ 以后，那么(39.6)的解就可以猜想是

$$f(x)=\frac{1}{E(D)}\ \phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tD}\ \phi(x)G(t)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-t)G(t)dt. \tag{39.7}$$

先举几个这样的例。

例1 由于

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|}e^{-st}dt=\frac{1}{1-s^2},\quad -1<\Re s<1,$$

所以关于方程

$$(1-D^2)f(x)=\phi(x),\ 即\ f(x)-f''(x)=\phi(x) \tag{39.8}$$

的解，可以猜想是

$$f(x)=\frac{1}{1-D^2}\phi(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tD}\phi(x)e^{-|t|}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-t)e^{-|t|}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)e^{-|x-t|}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{-x+t}\phi(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}e^{x-t}\phi(t)\,dt,$$

容易証明，这确实是微分方程的解。

例2 由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-e^t}e^te^{-st}dt=\int_0^\infty x^{-s}e^{-x}dx\quad(令\ e^t=x)$$
$$=\Gamma(1-s),\quad -\infty<\Re s<1,$$

現在和例1相反，我們試問，如果

$$\frac{1}{\Gamma(1-D)} f(x) = \phi(x),$$

那么 $f(x)$ 所满足的方程具有怎样的形式?

現在

$$\begin{aligned} f(x) &= \Gamma(1-D)\phi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t} e^t e^{-tD} \phi(x)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t} e^t \phi(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{(x-t)}} e^{x-t} \phi(t)\, dt. \end{aligned}$$

利用公式

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} = \lim_{n\to\infty} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{k}\right) e^{x/k},$$

其中 γ 是 Euler 常数，則对 $f(x)$ 就有

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\gamma D} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{D}{k}\right) e^{D/k} f(x) = \phi(x).$$

但是这个方程的意义应該如何解釋才好，这就是本章所要研究的問題。

§ 40 双边 Laplace 变換

所謂**双边 Laplace 变換**，指的是下面形狀的积分：

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\alpha(t). \tag{40.1}$$

$\alpha(t)$ 在任意有限区間中是有界变分函数。(40.1) 的意义是下面的极限値：

$$\lim_{R\to\infty,\ R'\to-\infty} \int_{-R'}^{R} e^{-st} d\alpha(t).$$

若 $\alpha(t)$ 是一个函数 $\phi(t)$ 的不定积分，那么就有

$$f(s) = \int_{\to-\infty}^{\to\infty} e^{-st} \phi(t)\, dt \quad \left[\text{写成} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \phi(t)\, dt\right].$$

$\alpha(t)$ 是已标准化了的函数，即

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \{\alpha(t+0) + \alpha(t-0)\}.$$

定理 40.1 設积分 (40.1) 对于 $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$ 及 $s_2 = \sigma_2 + i\tau_2$

$(\sigma_1<\sigma_2)$收斂，那么积分在带形区域 $\sigma_1<\Re s<\sigma_2$ 中收斂。

証明　先考虑积分 $\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$。因为当 $s=s_1$ 时积分收斂，所以根据定理 23.2，当 $\Re s>\sigma_1$ 时积分也收斂。其次积分

$$\int_{-\infty}^0 e^{-st}\,d\alpha(t)=-\int_0^\infty e^{-(-s)u}d\alpha(-u)$$

当 $-s=-\sigma_2$ 时收斂，所以仍然根据定理 23.2，当 $\Re(-s)>-\sigma_2$ 时，即 $\Re s<\sigma_2$ 时它也收斂。于是积分

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-st}d\alpha(t)$$

在 $\sigma_1<\Re s<\sigma_2$ 的范圍中收斂。当 $\sigma_1=-\infty$ 或 $\sigma_2=+\infty$ 或两者都成立时，收斂的区域可能是半平面或是全部平面。

积分 $\int_0^\infty e^{-st}\,d\alpha(t)$ 与 $\int_0^\infty e^{su}d\alpha(-u)$ 可能对于同一个 $s=s_0$ 收斂。实际有这样的积分 (40.1)，它仅在一条直綫 $s=\Re s_0+i\tau$ $(-\infty<\tau<\infty)$ 上收斂，例如

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2}e^{-st}\,dt$$

就仅当 $\Re s=0$ 时收斂。

关于收斂坐标有下面的定理。

定理 40.2　設

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\log|\alpha(t)|}{t}=k\neq0,\quad \limsup_{t\to-\infty}\frac{\log|\alpha(t)|}{t}=l\neq0,$$

若是 $k<l$，則积分

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-st}d\alpha(t)$$

当 $k<\Re s<l$ 时收斂，并且当 $\Re s<k$, $\Re s>l$ 时发散。

根据定理 24.4 可以容易地导出本定理，証明略。

下面討論一下反演公式。

定理 40.3　設 $\phi(t)$ 是在任意有限区間中的可积函数，并設

$$f(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}\phi(t)dt \tag{40.2}$$

当 $\Re s=c$ 时絕对收斂。如果 $\phi(t)$ 在 t 的近傍是有界变分函数，那么

$$\frac{1}{2}\{\phi(t+0)+\phi(t-0)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}f(s)e^{st}ds.$$

証明 由于积分(40.2)当 $\Re s=c$ 时絕对收斂，所以

$$e^{-ct}\phi(t)\in L_1(-\infty,\infty),$$

于是 $f(s)$ 是 $\sqrt{2\pi}\,e^{-ct}\phi(t)$ 的 Fourier 变换($s=c+i\tau$)，即

$$f(c+i\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ct}\phi(t)e^{-i\tau t}dt.$$

又因为 $\phi(t)e^{-ct}$ 在 t 的近傍是有界变分函数，由定理5.1，就有

$$\frac{1}{2}\{\phi(t+0)+\phi(t-0)\}e^{-ct}=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f(c+i\tau)e^{i\tau t}d\tau.$$

这样就得到

$$\frac{1}{2}\{\phi(t+0)+\phi(t-0)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}f(c+i\tau)e^{(c+i\tau)t}d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}f(s)e^{st}ds.$$ 証毕

§41 无穷乘积

在全平面正则的函数叫做整函数。整函数可以看成是多項式的扩張。与多項式的因式分解对应，現在講解一下整函数的因式分解。

設 $f(z)$ 是 z 的整函数，以 $a_1, a_2, \cdots$ 作为它的单根，且 $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots$。在 a_n 的近傍可以把 $f(z)$ 写成

$$f(z)=(z-a_n)g(z).$$

这里 $g(z)$ 是正則的，并且 $g(a_n)\neq0$。于是有

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-a_n}+\frac{g'(z)}{g(z)}. \tag{41.1}$$

右边的最后項当 $z=a_n$ 时正則。这就是說，$f'(z)/f(z)$ 在 $z=a_n$ 处有单极，在这点的留数是 1.

更一般地說，設函数 $\varphi(z)$ 在 $a_1, a_2, \cdots$ 处有单极 $(0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots)$，除此以外它是正則的，在 a_n 处的留数是 b_n。設 C_n 是包含 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的閉曲綫，原点与 C_n 的最短距离是 R_n，$R_n\to\infty$。設 C_n 的长度 $L_n=O(R_n)$，$\varphi(Z)=o(R_n)$（Z 是 C_n 上的点）。那么就有

$$\varphi(z)=\varphi(0)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right). \tag{41.2}$$

現在来証明这个公式。我們考慮积分

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{\varphi(w)}{w(w-z)}dw. \tag{41.3}$$

z 是 C_n 中的点。积分中的被积函数分别以 a_m $(m=1, 2, \cdots, n)$，0 及 z 为极点。这些极点处的留数分别为 $b_m/\{a_m(a_m-z)\}$，$-\varphi(0)/z$，$\varphi(z)/z$。于是有

$$I=\sum_{m=1}^{n}\frac{b_m}{a_m(a_m-z)}-\frac{\varphi(0)}{z}+\frac{\varphi(z)}{z}. \tag{41.4}$$

但是

$$|I|\leqslant\frac{1}{2\pi}\max_{C_n}|\varphi(w)|\cdot\frac{L_n}{R_n(R_n-|z|)}$$
$$=o(R_n)\cdot\frac{O(R_n)}{R_n(R_n-|z|)}=o(1).$$

于是由(41.4)就有

$$\frac{\varphi(z)}{z}=\frac{\varphi(0)}{z}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{a_m(a_m-z)}.$$

这样就証明了(41.2)。

若是 $\varphi(z)$ 在 C_n 上滿足 $\varphi(z)=o(R_n^{p+1})$，我們考慮

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{\varphi(w)}{w^{p+1}(w-z)}dz.$$

只要注意到 J 在 $w=0$ 处的留数是

$$-\frac{1}{z}\left\{\frac{\varphi(0)}{z^p}+\frac{\varphi'(0)}{z^{p-1}}+\cdots+\frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!}\right\},$$

就完全同样地可以得到

$$\varphi(z)=\varphi(0)+z\varphi'(0)+\cdots+\frac{z^p\varphi^{(p)}(0)}{b!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m z^{p+1}}{a_m^{p+2}(z-a_m)},$$

这样就証明了下面的公式：

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)z^k}{k!}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}b_m\left(\frac{1}{z-a_m}+\frac{1}{a_m}+\frac{z}{a_m^2}+\cdots+\frac{z^p}{a_m^{p+1}}\right).\qquad(41.5)$$

現在再回过头来，令 $\varphi(z)=f'(z)/f(z)$. 这个函数 $\varphi(z)$ 显然满足上面所說的条件，于是根据(41.2)就有

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{f'(0)}{f(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right).$$

对于这个方程我們沿着一条由 0 到 z，但是不通过极点的路綫进行积分，就可得到

$$\log f(z)-\log f(0)$$
$$=z\frac{f'(0)}{f(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log(z-a_n)-\log(-a_n)+\frac{z}{a_n}\right\}.$$

这里的 log 由于所选的路綫不同，可能取不同的值，但是如果把它取为 e 的指数，就能把这种不确定性完全消除了，从而得到

$$f(z)=f(0)e^{z\frac{f'(0)}{f(0)}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}.\qquad(41.6)$$

例如我們能够得到

$$\frac{\sin z}{z}=\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}$$

($\prod'$ 意味着除去对应于 $n=0$ 的項)，即

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{41.7}$$

同样地有

$$\cos z\pi = \prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{2z}{2k+1}\right)e^{\frac{2z}{2k+1}},$$

$$\cos z = \prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{2z}{(2n+1)\pi}\right)e^{\frac{2z}{(2n+1)\pi}}, \tag{41.8}$$

$$\cos z = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right). \tag{41.9}$$

§ 42 Laguerre-Pólya 函数族

我們現在討論一下当 $E(x)$ 属于某一函数族时 $E(D)$ 的意义。这种函数曾經 Laguerre 加以研究。通常假設

$$E(0)=1. \tag{42.1}$$

設 a_k, b, c 是实数，并且 $c\geqslant 0$，而且

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-2}<\infty. \tag{42.2}$$

在这种条件下，如果 $E(x)$ 能写成

$$E(x)=e^{-cx^2+bx}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_k}\right)e^{\frac{x}{a_k}}, \tag{42.3}$$

那么就說，$E(x)$ **属于函数族** E.

由于(42.2)，可知(42.3)中的无穷乘积收斂❶。現在述說一下关于 E 的几点性質。

設 $E(x)\in E$. 把 x 代成 $s=\sigma+i\tau$，并把 $E(x)$ 解析延拓到复平面中去，則 $E(s)$ 成为整函数，这时也記作 $E(s)\in E$.

引理 42.1 設 $E(s)\in E$，則

❶ 見 E. C. Titchmarsh: Theory of functions, p. 250 或小松勇作：一般函数論，p. 374.

$$|E(\sigma+i\tau)|\geqslant|E(\sigma)|. \qquad (42.4)$$

証明 由于

$$E(s)=e^{-cs^2+bs}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_k}\right)e^{\frac{s}{a_k}},\ c\geqslant 0,$$

所以

$$|E(\sigma+i\tau)|=e^{-c(\sigma^2-\tau^2)+b\sigma}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{\sigma}{a_k}\right)^2+\frac{\tau^2}{a_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}}e^{\sigma/a_k} \qquad (42.5)$$

$$\geqslant e^{-c\sigma^2+b\sigma}\prod_{k=1}^{\infty}\left|1-\frac{\sigma}{a_k}\right|e^{\sigma/a_k}=|E(\sigma)|. \qquad \text{証毕}$$

定理 42.1 若是 $E(s)\in E$, $E(s)\neq e^{bs}P(s)$，这里 $P(s)$ 是一个多項式，那末对于任意的正数 p 及 R，有

$$\frac{1}{|E(\sigma+i\tau)|}=O\left(\frac{1}{|\tau|^p}\right),\quad |\tau|\to\infty, \qquad (42.6)$$

这个式子在 $|\sigma|\leqslant R$ 的带形区域中一致地成立。

証明 設 $E(s)$ 只有有限个零点，又設 $c>0$. 零点的个数为 n. 这时由于(42.5)就有

$$|E(\sigma+i\tau)|\geqslant e^{-c(\sigma^2-\tau^2)+b\sigma}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\tau}{a_k}\right|e^{\sigma/a_k}$$

$$\geqslant e^{-cR^2+c\tau^2-|b|R}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\tau}{a_k}\right|e^{-R/|a_k|}\geqslant K\cdot e^{c\tau^2}.$$

此式当 $|\sigma|\leqslant R$ 时成立。K 一般是依賴于 R 及 n 的。因此，对于任意的 $p>0$ 成立着 $|E(\sigma+i\tau)|\leqslant\frac{1}{K}e^{-c\tau^2}=O\left(\frac{1}{|\tau|^p}\right)$.

下面再設 $E(s)$ 具有无限多个零点。令 $c\geqslant 0$，对于任意給定的 p，选这样的 N，使得 $N>p$，并且当 $k>N$ 时，有 $|a_k|>R$. 現在令

$$E_N(s)=\prod_{k=N+1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_k}\right)e^{s/a_k}.$$

根据引理 42.1，有 $|E_N(s)|\geqslant E_N(\sigma)$. 于是

$$|E(\sigma+i\tau)|\geqslant e^{-cR^2-|b|R}\prod_{1}^{N}\left|\frac{\tau}{a_k}\right|e^{-R/|a_k|}|E_N(\sigma)|.$$

由于$|a_k|>R$, $|\sigma|\leqslant R$, 并且因为$E_N(\sigma)=\prod_{k=N+1}^{\infty}\left|1-\frac{\sigma}{a_k}\right|e^{\sigma/a_k}$, 所以$E_N(\sigma)\neq 0(|\sigma|\leqslant R)$. 假設$\frac{1}{E_N(\sigma)}$的最大值是$M$, 则

$$\frac{1}{|E(\sigma+i\tau)|}\leqslant e^{cR^2+|b|R}\left(\prod^{N}\left|\frac{\tau}{a_k}\right|e^{-R/|a_k|}\right)^{-1}M$$

$$=K_1(N,R)\cdot\frac{1}{|\tau|^N}=O\left(\frac{1}{|\tau|^p}\right).$$

这里$K_1(N,R)$是与τ无关的定数。 証毕

现在考虑(41.1)中的函数g是下面函数的情形,

$$g(t)=\begin{cases}e^t, & -\infty<t<0,\\ 1/2, & t=0,\\ 0, & 0<t<\infty.\end{cases}\tag{42.7}$$

这时,

$$\chi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}g(t)\,dt=\frac{1}{1-s},\quad -\infty<\Re s<1,$$

$$\chi(0)=1.$$

又$|a|g(at)\,(\geqslant 0)$的 Laplace 变換是

$$\chi_1(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}|a|g(at)\,dt=\left(1-\frac{s}{a}\right)^{-1},\quad \begin{matrix}\Re s<a\,(a>0)\\ \Re s>a\,(a<0)\end{matrix}$$

$$\chi_1(0)=1.\tag{42.8}$$

設$a_1, a_2, \cdots, a_n$是异于零的实数,不一定全部是不同的。令

$$g_k(t)=|a_k|g(a_kt),\quad k=1,2,\cdots,n.\tag{42.9}$$

并且設α_1是$a_1, a_2, \cdots, a_n$中最大的負数(如果所有的a_k都是正的,那么就設$\alpha_1=-\infty$), α_2是$a_1, a_2, \cdots, a_n$中最小的正数(如果所有的a_k都是負的,那么就設$\alpha_2=+\infty$). 使用了这些記号,就有下面的定理。

定理 42.2 設$G(t)=g_1*g_2*\cdots*g_n(t)$, 令

$$E(s)=\prod_1^n\left(1-\frac{s}{a_k}\right),$$

則

$$\frac{1}{E(s)}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}G(t)\,dt, \quad \alpha_1<\Re s<\alpha_2, \qquad (42.10)$$

并且

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\,dt=1, \quad m=\int_{-\infty}^{\infty} tG(t)\,dt=-\sum_1^n \frac{1}{a_k},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t-m)^2 G(t)\,dt=\sum_1^n \frac{1}{a_k^2}.$$

証明 容易証明如果 $a_k>0$，則 $g_k(t)$ 的 Laplace 变換当 $\Re s<a_k$ 时絕对收斂;如果 $a_k<0$，則当 $\Re s>a_k$ 时絕对收斂。由于这个 Laplace 变换是$(1-s/a_k)^{-1}$(根据(42.8))，所以 $g_1*\cdots*g_n(t)$ 的 Laplace变换可以反复地应用定理 27.3 而得到,是 $\prod_1^n(1-s/a_k)^{-1}$，并且容易証明它的收斂范圍是 $\alpha_1<\Re s<\alpha_2$. 在(42.10)中設 $s=0$，由于 $E(0)=1$，所以有 $\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\,dt=1$. 又因为

$$\frac{E'(s)}{E(s)}=-\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k-s}.$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} tG(t)\,dt=-\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{E(s)}\right]_{s=0}=\left[\frac{E'(s)}{E^2(s)}\right]_{s=0}$$

$$=\left[\frac{E'(s)}{E(s)}\right]_{s=0}\cdot\frac{1}{E(0)}=-\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}.$$

同样地

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2G(t)\,dt=\left[\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{E(s)}\right]_{s=0}$$

$$=\left[-\frac{E''(s)}{E^2(s)}+\frac{2(E'(s))^2}{E^3(s)}\right]_{s=0}$$

$$=-E''(0)+2(E'(0))^2.$$

因为

$$E''(s)=-E'(s)\sum\frac{1}{a_k-s}-E(s)\sum\frac{1}{(a_k-s)^2},$$

$$E''(0)=\left(\sum\frac{1}{a_k}\right)^2-\sum\frac{1}{a_k^2}, \quad E'(0)=-\sum\frac{1}{a_k},$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 G(t)\,dt = \sum \frac{1}{a_k^2} + \left(\sum \frac{1}{a_k}\right)^2.$$

也就是有

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-m)^2 G(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 G(t)\,dt - m^2 = \sum \frac{1}{a_k^2}.\qquad \text{証畢}$$

定理 42.3 設 $E(s)\in E$, 并且 $E(s)\neq e^{bs}P(s)$, [$P(s)$ 是一个多項式],这样就成立着

$$\frac{1}{E(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} G(t)\,dt. \tag{42.11}$$

公式成立的范圍是含有坐标原点,但不含 $E(s)$ 的零点的所有垂直带形区域中最大的那一个。这里 $G(t)\geqslant 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\,dt=1$, 并且

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{st}}{E(s)}\,ds. \tag{42.12}$$

証明 由于 $E(s)\in E$, 所以存在着多項式 $E_n(s)$ 的函数序列,使得

$$\lim_{n\to\infty} E_n(s) = E(s) \tag{42.13}$$

在任一个 $|s|\leqslant A$ 的圓中一致收斂。下面我們可以証明,这样的 $E_n(s)$ 仅有实零点。据所熟知的事实,由于 $\sum \frac{1}{a_k^2}<\infty$, 所以(42.3)中的无穷乘积为它的部分乘积在 $|s|\leqslant A$ 范圍中所一致趋近❶。但是这些部分乘积都是只有实零点的多項式和形状如 $e^{\alpha x}$ 的函数的乘积 [可以把 (42.3) 中的 e^{bx} 算入后一項], 于是只要証明函数 e^{-cs^2} 与 $e^{\alpha x}$ 都可以用仅具有实零点的多項式来迫近就够了。

我們規定,下面所考虑的是当 $z=0$ 时成为零的 log 的分支,那末由 Taylor 定理,当 $|z|\leqslant A$, $n\geqslant 2A$ 时,成立着

---

❶ 見前面举出的 Titchmarsh 的书。

$$\left|z+\log\left(1-\frac{z}{n}\right)^n\right|\leqslant n\left[\frac{1}{2}\left|\frac{z}{n}\right|^2+\frac{1}{3}\left|\frac{z}{n}\right|^3+\cdots\right]$$

$$\leqslant\frac{n}{2}\ \frac{|z|^2/n^2}{1-|z|/n}\leqslant\frac{A^2}{n}.$$

在这里令 $z=-\alpha s\ (\alpha\neq 0)$，則当 $|s|\leqslant\frac{A}{|\alpha|}$时，有

$$\left|-\alpha s+\log\left(1+\frac{\alpha s}{n}\right)^n\right|\leqslant\frac{A^2}{n},$$

因为
$$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1,$$

所以
$$\left|\exp\left\{-\alpha s+\log\left(1+\frac{\alpha s}{n}\right)^n\right\}-1\right|\leqslant e^{A^2/n}-1,$$

也就是
$$\left|\left(1+\frac{\alpha s}{n}\right)^n e^{-\alpha s}-1\right|\leqslant e^{A^2/n}-1.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha s}{n}\right)^n=e^{\alpha s}$ 当 $|s|\leqslant A/|\alpha|$ 时一致地成立。所以把 αs 換成 $-cs^2$，当 $|s|\leqslant(A/c)^{1/2}$ 时，就有一致收斂的公式

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{cs^2}{n}\right)^n=e^{-cs^2}.$$

这样就証明了(42.13)在任意圓中应該成立，并且这种收斂是一致的。

現在根据引理 42.1，有

$$|E(iy)|\geqslant E(0)=1,$$

所以在 $|y|\leqslant A$ 中一致地成立着

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{E_n(iy)}=\frac{1}{E(iy)}. \qquad (42.14)$$

由于定理 42.2，有这样的函数 $\alpha_n(t)$，使得

$$\frac{1}{E_n(iy)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iyt}\,d\alpha_n(t).$$

这里

$$\alpha_n(t)=\int_{-\infty}^{t}G_n(u)\,du,$$

其中 $G_n(u)$ 是相当于定理 42.2 中 $G(t)$ 的函数。因为 $G_n(t)\geqslant 0$，所以 $\alpha_n(t)$ 是单調增函数，并且 $\alpha_n(\infty)=1$, $\alpha_n(-\infty)=0$. 这样，根据定理 18.2 及(42.14)，可知存在着满足方程

$$\frac{1}{E(iy)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iyt}d\alpha(t) \tag{42.15}$$

的函数 $\alpha(t)$. 于是

$$\alpha(t)-\alpha(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{st}-1}{sE(s)}\,ds. \tag{42.16}$$

据定理 42.1 可知，上式右边的积分絕对收斂。再由定理 42.1，当对上式的两边作微分时，在公式的右边，微分可以在积分符号以内进行。由于 $\alpha'(t)=G(t)$，所以有

$$\alpha'(t)=G(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{st}}{E(s)}\,ds,\quad -\infty<t<\infty.$$

这时再用一下(42.15)，就得到

$$\frac{1}{E(iy)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iyt}G(t)\,dt.$$

但是 $E(s)$ 是整函数，$\frac{1}{E(s)}$ 在包含原点，但不含 $E(s)$ 的零点的最大带形区域 $\alpha_0<\Re s<\beta_0$ (令这个区域为 S) 中是正則的。所以 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}G(t)\,dt$ 在 S 中收斂。收斂的理由很明显，因为

$$(E(s))^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}d\alpha_n(t)$$

在 S 中收斂，且在 S 内的任一閉区域中一致收斂于 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}\,d\alpha(t)$. 于是在 S 中成立着

$$\frac{1}{E(s)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}G(t)\,dt. \qquad \text{証毕}$$

关于函数 $G(t)$ 还有下面的定理。

定理 42.4 定理 42.3 中的函数 $G(t)$ 有下列的性质：

(i) $G(t)\geqslant 0$,

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} G(t)dt = 1$,

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} tG(t)dt = b$,

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} (t-b)^2 G(t)dt = c + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2}$.

証明 (i), (ii) 无需再証明。至于 (iii) 及 (iv), 可以把定理 42.2 中的(42.11)微分,然后代入 $s=0$, 就能得到証明。

§43 反演公式

現在我們研究 $E(D)$ 的意义。为此,先討論一下和这个問題有关的一般結合变換

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t)G(t)dt \tag{43.1}$$

的反演公式。就是說 $G(t)$ 是已給的函数,如何用 f 来表达函数 ϕ。

定理 43.1 設 $E(x) \in E$, 但 $b=c=0$。$G(x)$是在定理 42.3 中用(42.11)所定义的函数, $\phi(x)$ 在$(-\infty, \infty)$中为有界連續函数。若成立

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t)G(t)dt, \tag{43.2}$$

那么就有

$$E(D)f(x) = \phi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{43.3}$$

这里

$$E(D) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) e^{D/a_k}. \tag{43.4}$$

在証明定理以前我們先解釋一下定理的意义。令

$$P_n(D) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) e^{D/a_k}.$$

(43.3)式显然是

$$E(D) \cdot G * \phi(x) = \phi(x).$$

这个式子的意义就是

$$\lim_{n\to\infty} P_n(D)\int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\phi(t)\,dt \equiv \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_n(D)G(x-t)\phi(t)\,dt.$$

这里 $P_n(D)G(x)$ 的意义如下：

$$\begin{aligned}
P_n(D)G(x) &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{D}{a_k}\right)e^{D/a_k}G(x)\\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{D}{a_k}\right)e^{D/a_k}\left(1-\frac{1}{a_n}\frac{d}{dx}\right)G\left(x+\frac{1}{a_n}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{D}{a_k}\right)e^{D/a_k}\left(G\left(x+\frac{1}{a_n}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{a_n}G'\left(x+\frac{1}{a_n}\right)\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{D}{a_k}\right)e^{D/a_k}G_1(x),
\end{aligned}$$

重复地使用这种方法，就得到

$$\begin{aligned}
&= \prod_{k=1}^{n-2}\left(1-\frac{D}{a_k}\right)e^{D/a_k}G_2(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&= G_n(x).
\end{aligned}$$

所以(43.3)的意义就是

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_n(x-t)\phi(t)\,dt = \phi(x). \tag{43.5}$$

現在我們来証明这个公式。

証明　根据(43.12)有

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{sx}}{E(s)}\,ds.$$

于是就有

$$G_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{sx}P_n(s)}{E(s)}\,ds. \tag{43.6}$$

这个公式的証明如下。由于

$$e^{\alpha D}G(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{\alpha D}e^{sx}}{E(s)}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{s(x+\alpha)}}{E(s)}\,ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{sx}e^{s\alpha}}{E(s)}ds,$$

又因为

$$DG(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}De^{sx}\frac{e^{s\alpha}}{E(s)}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{sx}\frac{se^{s\alpha}}{E(s)}ds,$$

反复的使用这两个公式就能导出(43.6)。

現在

$$E_n(s)=\frac{E(s)}{P_n(s)}$$

是属于 E 族的函数。根据定理 42.4，对于这个 $E_n(s)$ 存在着相当于定理 42.4 中 $G(t)$ 的函数，我們令它为 $G_n(t)$。$G_n(t)$ 具有定理 42.4 所描述的性质。于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}G_n(t)dt=1.$$

这时，如果令

$$I_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G_n(x-t)\phi(t)dt-\phi(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}G_n(y)[\phi(x-y)-\phi(x)]dy,$$

那么我們只要証明，当 $n\to\infty$ 时 $I_n(x)$ 收斂于零，就得到了定理的証明。事实上，令

$$I_n(x)=\int_{|y|<\delta}+\int_{|y|>\delta}$$

$$=J_1+J_2. \qquad (43.7)$$

δ 是这样确定的：对于已給的正数 ε，若是 $|y|\leqslant\delta$，就有下面的不等式：

$$|\phi(x-y)-\phi(x)|<\varepsilon.$$

于是

$$|J_1|\leqslant\int_{-\delta}^{\delta}G_n(y)|\phi(x-y)-\phi(x)|dy$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} G_n(y)dy \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} G_n(y)dy = \varepsilon. \qquad (43.8)$$

其次,

$$|J_2| \leqslant 2 \sup_{-\infty<y<\infty} \phi(y) \int_{|y|>\delta} G_n(y)dy$$

$$\leqslant 2 \sup_{-\infty<y<\infty} \phi(y) \frac{1}{\delta^2} \int_{|y|>\delta} y^2 G_n(y)dy$$

$$\leqslant 2 \sup_{-\infty<y<\infty} \phi(y) \frac{1}{\delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 G_n(y)dy$$

$$= 2 \sup_{-\infty<y<\infty} \phi(y) \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2}.$$

利用定理(42.4)的性質(iv),就得到

$$\limsup_{n\to\infty} J_2 = 0.$$

把这些結果代入(43.7),就得到

$$\limsup_{n\to\infty} |I_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的,所以 $I_n(x) \to 0 \quad (n\to\infty)$. 証毕

§44 Laplace 变换的反演公式

我們在§26中已經講解过 Laplace 变换的反演公式。設

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$$

是在 $|z|\leqslant 1$ 中的正則函数,于是

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

C 是单位圆周。和这个公式相类似的是(26.1)的反演公式。更确切地說,(26.1)的反演公式与

$$\frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n,$$

$$s_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}} dz$$

相类似[1]。

但是用$f(z)$求系数a_n的公式另外还有一个，即大家所熟知的$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，这一节中我們研究一下和这个公式相类似的結果。

由§6中的例2，我們知道可以用結合变换的公式导出Laplace变换，所以对于Laplace变换的反演公式，自然可以想象，应該能由前节中的反演公式导出。

設

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}\phi(t)dt. \tag{44.1}$$

象§5中那样，把x换成e^x，把t换成e^{-t}，就得到

$$f(e^x)e^x=\int_{-\infty}^\infty e^{-e^{x-t}}e^{x-t}\phi(e^{-t})dt.$$

令$f(e^x)e^x=F(x)$，$\phi(e^{-x})=\psi(x)$，$e^{-e^x}e^x=G(x)$，则有

$$F(x)=G*\psi(x). \tag{44.2}$$

現在要用F来表达ψ，自然可用定理43.1。在这种情形下

$$\frac{1}{E(x)}=\int_{-\infty}^\infty e^{-st}G(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^\infty e^{-xt}e^{-e^t}e^t dt=\int_0^\infty e^{-y}y^{-x}dy=\Gamma(1-x),\ -\infty<x<1.$$

但是，

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)}=e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^\infty\left(1-\frac{x}{k}\right)e^{x/k}\text{[2]},$$

[1] 作者这段叙述可能是从D. V. Widder: The Laplace transform (1946), II §7 中摘引过来的，那里指的是Laplace-Stieltjes变换的反演。設$\alpha(t)=s_n$ $(n-1\leqslant t<n;\ n=1,2,\cdots)$，$\alpha(0)=1$，又設$e^{-s}=z$. 那末

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$$

的反演就是

$$\alpha(t)=s_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{f(e^{-s})e^{st}}{1-e^{-s}}ds$$

$$(n-1\leqslant t<n;\ n=1,2,\cdots;C>0).$$

由留数定理，被积函数的分母$1-e^{-s}$可以换为s，于是得到定理26.1里的形式。但如果用来比喻Laplace变换的反演，更确切的其实倒是前面关于a_n的公式。又原文中，§26誤作§16，(26.1)誤作(41.1)．——校者注

[2] 見河田：应用数学概論I（岩波全书）。

这里

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right).$$

令
$$P_n(x) = e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{k}\right)e^{x/k} = n^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{k}\right),$$

于是(43.3)或是(43.5)就成为

$$\lim_{n\to\infty} P_n(D)e^x f(e^x) = \phi(e^{-x}). \tag{44.3}$$

这个式子的左边是

$$(1-D)e^x f(e^x) = e^x f(e^x) - \frac{d}{dx}e^x f(e^x)$$
$$= -e^{2x} f'(e^x),$$
$$\left(1-\frac{D}{2}\right)e^{2x} f(e^x) = e^{2x} f'(e^x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^{2x} f'(e^x)$$
$$= -\frac{1}{2}e^{3x} f''(e^x).$$

連續的使用这种計算,就得到

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{D}{k}\right)e^x f(e^x) = \frac{(-1)^n}{n!}e^{(n+1)x} f^{(n)}(e^x).$$

于是

$$n^D\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{D}{k}\right)e^x f(e^x) = e^{(\log n)D}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{D}{k}\right)e^x f(e^x)$$
$$= e^{(\log n)D}\frac{(-1)^n}{n!}e^{(n+1)x} f^{(n)}(e^x)$$
$$= \frac{(-1)^n}{n!}e^{(n+1)(x+\log n)} f^{(n)}(e^{x+\log n})$$
$$= \frac{(-1)^n}{n!}e^{(n+1)x} n^{(n+1)} f^{(n)}(ne^x).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e^{-x}}\right)^{n+1} f^{(n)}(ne^x) = \phi(e^{-x}).$$

令 $e^{-x}=y$, 就得到下面的定理。

定理 44.1 設 $\phi(t)$ 是有界連續函数,并設

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}\phi(t)\,dt,\quad x>0,$$

則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{y}\right)^{n+1}f^{(n)}\left(\frac{n}{y}\right)=\phi(y).$$

§45 Weierstrass 变换

在 §43 中所討論的函数 $E(x)$ 是当 $c=0$ 时的情形，在这一节中我們研究 $c\neq 0$ 的一个例子，即

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-(x-t)^2/4}\phi(t)\,dt. \tag{45.1}$$

这时，叫 $f(x)$ 为 $\phi(x)$ 的 **Weierstrass 变换**。

令

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-x^2/4}, \tag{45.2}$$

則(45.1)可以写成

$$f(x)=\phi*G(x).$$

由于

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-st}G(t)\,dt=e^{s^2}\ (\text{可由}(3.15)\text{导出}), \tag{45.3}$$

所以

$$e^{-s^2}=E(s).$$

于是可以猜想 f 与 ϕ 所滿足的方程为

$$e^{-D^2}f(x)=\phi(x).$$

現在我們来解釋一下 $e^{-D^2}f(x)$ 的意义。

比(45.3)更一般的公式是(据(3.15))

$$e^{ys^2}=(4\pi y)^{-1/2}\int_{-\infty}^\infty e^{-st}e^{-t^2/(4y)}\,dt,$$

它对于所有的复变数 s 都成立。令 $s=-iD$，則有

$$e^{-yD^2}=(4\pi y)^{-1/2}\int_{-\infty}^\infty e^{itD}e^{-t^2/(4y)}\,dt.$$

对它使用公式(39.1)，就得到

$$e^{-yD^2}f(x)=(4\pi y)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itD}f(x)e^{-t^2/(4y)}dt$$
$$=(4\pi y)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+it)e^{-t^2/(4y)}dt$$
$$=-i(4\pi t)^{-1/2}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}f(z)e^{(z-x)^2/(4y)}dz.$$

因为对于很多的函数 f 能够証明，积分中的积分路綫的直綫允許用一条与它平行的直綫来代替，所以現在把这条积分路綫换成 $(c-i\infty,\ c+i\infty)$ 后（c 适当的定数），就得到下面关于 e^{-D^2} 的定义。

$$e^{-D^2}f(x)=\lim_{y\to1-0}e^{-yD^2}f(x)$$
$$=\lim_{y\to1-0}-i(4\pi y)^{-1/2}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}f(z)e^{(z-x)^2/(4y)}dz \qquad (45.4)$$

（c 是适当的常数）。

譬如在(43.4)中 $E(D)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(D)$ 內的 n，現在在(45.4)中和它对应的是 y 这个参数。利用(45.4)对于 $e^{-D^2}f(x)$ 所作的解释，就得到了下面的定理。

定理 45.1 設 $\phi(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 中是有界連續函数，而 $f(x)$ 是用(45.1)所决定的 ϕ 的 Weierstrass 变换，則

$$e^{-D^2}f(x)=\phi(x),\quad -\infty<x<\infty. \qquad (45.5)$$

証明 由(45.3)及反演公式(定理 40.3)有

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-x^2/4}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{zx+z^2}dz. \qquad (45.6)$$

于是

$$-i(4\pi y)^{-1/2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp(-z^2/4)\exp\{(z-x)^2/4y\}dz$$
$$=-i\frac{1}{4\pi\sqrt{y}}\int_{-i\infty}^{i\infty}\exp\left(z^2\frac{1-y}{4y}-\frac{x}{2y}z\right)dz$$
$$=-i\frac{1}{2\pi\sqrt{1-y}}\int_{-i\infty}^{i\infty}\exp\left(s^2-\frac{x}{2y}\sqrt{\frac{4y}{1-y}}s\right)ds,$$

根据(45.6)，

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi(1-y)}}\exp(-x^2/4(1-y)). \tag{45.7}$$

于是由(45.4)有

$$e^{-D^2}f(x)=\lim_{y\to1-0}e^{-yD^2}f(x)$$

$$=\lim_{y\to1-0}\Big[-i(4\pi y)^{-1/2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\exp\{(z-x)^2/4y\}dz$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-(z-t)^2/4\}\phi(t)dt\Big]$$

$$=\lim_{y\to1-0}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)dt(-i(4\pi y)^{-1/2})$$

$$\times\int_{-i\infty}^{i\infty}\exp\{(z-x)^2/4y\}\exp\{-(z-t)^2/4\}dz$$

$$=\lim_{y\to1-0}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)dt\,\frac{-i}{\sqrt{4\pi y}}$$

$$\times\int_{-t-i\infty}^{-t+i\infty}\exp\{(s-x+t)^2/4y\}\exp(-s^2/4)ds,$$

容易証明，最后积分中的积分可以換成$\int_{-i\infty}^{i\infty}$，于是由(45.7)就得到了

$$=\lim_{y\to1-0}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\frac{1}{\sqrt{4\pi(1-y)}}\exp\{-(x-t)^2/4(1-y)\}dt$$

根据定理10.1，右边应該等于$\phi(x)$。（只要在定理10.1中令$K(x,t,\delta)=K(x-t,\delta)=\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{4\pi}}\exp\{-\delta(x-t)^2\}$卽可。）　証毕

§46 Stieltjes 变换

現在我們純粹形式地对$\varphi(t)$連施以两次Laplace变换，卽設

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xu}du\int_0^\infty e^{-ut}\varphi(t)dt$$

$$=\int_0^\infty\varphi(t)dt\int_0^\infty e^{-u(x+t)}du$$

$$=\int_0^\infty\frac{\varphi(t)}{x+t}dt.$$

一般，設 $\varphi(t)$ 是定义在 $0<t<\infty$ 中的函数，如果

$$f(s)=\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{s+t}dt \tag{46.1}$$

收斂的話，那么就叫 f 是 $\varphi(t)$ 的 **Stieltjes 变换**。关于这个变换的收斂区域以及解析性质有下面的定理。

定理 46.1 若是积分(46.1)对于一个不在負实軸(包含原点)上的点 s_0 收斂，那么它就对任何一个这样的点 s 收斂，而 $f(s)$ 在沿着射綫 $(-\infty, 0]$ 割开的平面上是正則函数。

証明 設 $$f(s_0,t)=\int_0^t \frac{\varphi(u)}{s_0+u}du,$$

則
$$\int_0^t \frac{\varphi(u)}{s+u}du=\int_0^t \frac{s_0+u}{s+u}\,\frac{\varphi(u)}{s_0+u}du$$

$$=f(s_0,t)\frac{s_0+t}{s+t}+(s_0-s)\int_0^t \frac{f(s_0,u)}{(s+u)^2}du.$$

根据假設，$f(s_0,t)$ 当 $t\to\infty$ 时收斂，所以无論是第一項或是第二項对于不在 $(-\infty, 0]$ 上的点都是收斂的。于是

$$f(s)=\int_0^\infty \frac{\varphi(u)du}{s+u}=f(s_0)+(s_0-s)\int_0^\infty \frac{f(s_0,u)}{(s+u)^2}du. \tag{46.2}$$

这样就証明了定理的前半部。

和上面的証法同样地有

$$\int_R^\infty \frac{\varphi(u)du}{s+u}=\left[f(s_0,u)\frac{s_0+u}{s+u}\right]_R^\infty+(s_0-s)\int_R^\infty \frac{f(s_0,u)}{(s+u)^2}du.$$

于是

$$\left|\int_R^\infty \frac{\varphi(u)du}{s+u}\right|\leqslant|f(s_0)-f(s_0,R)|+\left|f(s_0,R)\frac{s-s_0}{s+R}\right|$$

$$+|s_0-s|\int_R^\infty \frac{|f(s_0,u)|}{|s+u|^2}du.$$

現在設 s 是在除去 $(-\infty, 0]$ 的平面中任意一个閉区域 D 内的任意点。設原点到 D 中一点的最大距离为 d，那么 $|s|\leqslant d$. 設 $R>d$，則

$$\left|\int_R^\infty \frac{\varphi(u)du}{s+u}\right| \leqslant |f(s_0)-f(s_0, R)| + |f(s_0, R)| \frac{d+|s_0|}{R-d}$$

$$+(d+|s_0|)\int_R^\infty \frac{|f(s_0, u)|}{(u-d)^2} du.$$

在这里令 $R\to\infty$，右边的各項都收斂于 0，所以

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u)du}{s+u}$$

在閉区域 D 中一致收斂。此外，$\int_0^R \frac{\varphi(u)du}{s+u}$ 在 D 中显然是正則的，所以 $\int_0^\infty \frac{\varphi(u)du}{s+u}$ 在 D 中正則，即 $f(s)$ 在 $(-\infty, 0]$ 以外的全部复数平面上正則。 証毕

此外，容易証明

$$f^{(n)}(s)=(-1)^n n!\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{(s+t)^{n+1}} dt, \quad n=0, 1, 2, \cdots. \quad (46.3)$$

下面証明一下反演公式。

定理 46.2 設

$$f(s)=\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{s+t} dt$$

在除去 $(-\infty, 0]$ 的任一区域中收斂。若是对于一个 t $(t>0)$，$\varphi(t+0)$ 及 $\varphi(t-0)$ 都存在，那么

$$\frac{1}{2}\{\varphi(t+0)+\varphi(t-0)\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}(f(-t-i\varepsilon)-f(-t+i\varepsilon)). \quad (46.4)$$

証明

$$\frac{1}{2\pi i}\{f(-t-i\varepsilon)-f(-t+i\varepsilon)\}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \varphi(u)\left\{\frac{1}{-t-i\varepsilon+u}-\frac{1}{-t+i\varepsilon+u}\right\}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varepsilon\varphi(u)du}{(u-t)^2+\varepsilon^2}. \quad (46.5)$$

在定理 10.1 中，取 $K(t, u, \varepsilon)=K(u-t, \varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{\pi(u-t)^2+\varepsilon^2}$，就可以看出，当 $\varepsilon\to 0$ 时，(46.5) 的右边趋于 (46.4) 的左边。应用定理 10.1 时設 $\alpha=1$。所以，为了說明应用定理 10.1 是合理的，只要証明

$$\frac{\varphi(u)}{1+u^2}\in L_1(0, \infty)$$

就够了。下面我們来导出这个結果。由于当 $s=1$ 时，$f(s)$ 的积分收斂，积分

$$\int_c^\infty \frac{\varphi(t)}{t}dt, \quad c>0$$

存在。現在再証明积分

$$\int_c^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}dt$$

也存在。事实上，

$$\int_c^R \frac{\varphi(t)}{t^2}dt=\left[\frac{1}{t}\int_c^t \frac{\varphi(u)}{u}du\right]_c^R+\int_c^R \frac{1}{t^2}dt\int_c^t \frac{\varphi(u)}{u}du$$
$$=\frac{1}{R}\int_0^R \frac{\varphi(u)}{u}du+\int_c^R \frac{dt}{t^2}\int_c^t \frac{\varphi(u)}{u}du,$$

因为 $\left|\int_c^t \frac{\varphi(u)}{u}du\right|$ 有界 $(\leqslant M)$，所以右边的第一項当 $R\to\infty$ 时收斂于零。此外，对于第二項有

$$\int_c^R \frac{dt}{t^2}\left|\int_c^t \frac{\varphi(u)}{u}du\right|\leqslant M\int_c^R \frac{dt}{t^2}.$$

所以当 $R\to\infty$ 时 $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\int_c^t \frac{\varphi(u)}{u}du$ 存在，即 $\frac{\varphi(t)}{t^2}\in L_1(c, \infty)$.

証毕

§ 47 Stieltjes 变换与結合函数

考虑

$$E(s)=\frac{\sin \pi s}{\pi s}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right). \tag{47.1}$$

由于 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin \pi s}$, $\Re s<1$,

所以
$$\frac{\sin \pi s}{\pi s}=\frac{1}{s\Gamma(s)\Gamma(1-s)}=\frac{1}{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s)}. \tag{47.2}$$

令
$$G(t)=e^{-e^t}e^t,$$

則
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}G(t)dt=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-s}dt=\Gamma(1-s), \quad \Re s<1. \tag{47.3}$$

又
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}dt\int_{-\infty}^{\infty} G(t-u)G(-u)du &=\int_{-\infty}^{\infty} G(-u)du\int_{-\infty}^{\infty} G(t-u)e^{-st}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty} G(-u)e^{-su}du\int_{-\infty}^{\infty} G(t-u)e^{-s(t-u)}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty} G(-u)e^{-su}du\int_{-\infty}^{\infty} G(v)e^{-sv}dv\\&=\int_{-\infty}^{\infty} G(u)e^{su}du\int_{-\infty}^{\infty} G(v)e^{-sv}dv,\end{aligned}$$

根据(47.3)
$$=\Gamma(1+s)\cdot\Gamma(1-s), \quad -1<\Re s<1. \tag{47.4}$$

又因为
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} G(t-u)G(-u)du&=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{t-u}}e^{t-u}e^{-e^{-u}}e^{-u}du\\&=e^t\int_0^{\infty} ve^{-(e^t+1)v}dv=\frac{e^t}{(e^t+1)^2}, \quad -\infty<t<\infty,\end{aligned}$$

所以根据(47.4)有
$$\frac{\pi s}{\sin \pi s}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\cdot\frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt, \quad -1<\Re s<1. \tag{47.5}$$

此外，設 $\varphi(t)$ 的 Stieltjes 变换是 $f(x)$，卽
$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{\varphi(t)}{x+t}dt, \quad x>0. \tag{47.6}$$

我們来导出它的反演公式。前一节所講的反演公式主要是用复变数求到的，这一节我們用实变数来求。

先把(47.6)对 x 微分，根据(46.3)就有

$$f'(x)=-\int_0^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^2}.$$

把 x 换成 e^x，t 换成 e^t，就得到

$$-e^x f'(e^x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x-t}\phi(e^t)}{(e^{x-t}+1)^2}dt.$$

公式的右边显然是 $\dfrac{e^t}{(e^t+1)^2}$ 与 $\phi(e^t)$ 的結合函数，所以由定理 43.1，有

$$-\frac{\sin\pi D}{\pi D}[e^x f'(e^x)]=\varphi(e^x),\quad -\infty<x<\infty.$$

这就是說，成立着

$$-\lim_{n\to\infty}\prod_{k=-n+1}^{n+1}{}'\left(1+\frac{D}{k}\right)[e^x f'(e^x)]=\varphi(e^x).$$

这里 $\prod'$ 表示应除去 $k=0$ 这一項。

象定理 43.1 中的証明那样，有

$$-\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{D}{k}\right)[e^x f'(e^x)]=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}e^{nx}f^{(n)}(e^x).$$

于是

$$\begin{aligned}-\prod_{k=-n+1}^{n+1}{}'&\left(1+\frac{D}{k}\right)[e^x f'(e^x)]\\&=\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{D}{k}\right)\left(-\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{D}{k}\right)[e^x f'(e^x)]\right)\\&=\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{D}{k}\right)\left(\frac{(-1)^n}{(n-1)!}e^{nx}f^{(n)}(e^x)\right).\end{aligned}\tag{47.7}$$

但是利用一下公式

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{D}{k}\right)ce^{-kx}g(x)&=ce^{-kx}g(x)+\frac{c}{k}(-ke^{kx}g(x)+e^{-kx}g'(x))\\&=\frac{c}{k}e^{kx}g'(x),\end{aligned}$$

并且令 $e^{nx}f^{(n)}(e^x)=e^{-(n+1)x}H(e^x)$，则(47.7)就成为

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{D}{k}\right)\left(1+\frac{D}{n+1}\right)\frac{(-1)^n}{(n-1)!}e^{-(n+1)x}H(e^x)$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{D}{k}\right)\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\ \frac{1}{n+1}e^{-nx}H'(e^x),$$

反复地使用这种方法，就得到

$$=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\ \frac{1}{(n+1)!}H^{(n+1)}(e^x)$$

$$=\frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+1)!}\left[xf^{(n)}(x)\right]_{x=e^x}^{(n+1)}.$$

因此根据定理 43.1，就得到下面的結果：

定理 47.1　設 $\varphi(x)$ 是有界連續函数 $(0<x<\infty)$。如果它的 Stieltjes 变换存在，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!(n-1)!}\ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[x^{2n+1}f^{(n)}(x)]=\varphi(x),\quad 0<x<\infty.$$

对于这个反演問題，我們还能証明其他形式的公式。由于

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{\varphi(t)}{x+t}\,dt,$$

所以有

$$e^{x/2}f(e^x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{t/2}\varphi(e^t)}{e^{(x-t)/2}+e^{-(x-t)/2}}dt.\qquad(47.8)$$

这个式子的右边显然是 $e^{t/2}\varphi(e^t)$ 与 $\frac{1}{2}\operatorname{sech}\frac{t}{2}$ 的結合函数。由(47.5)有

$$\frac{\pi s}{\sin\pi s}=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{e^t+1}\right)dt,$$

利用分部积分法，

$$=-s\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-st}}{e^t+1}\,dt,\quad -1<\Re s<0.$$

所以有

$$\frac{\pi}{\sin \pi s}=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-st}}{e^t+1}dt.$$

把 s 换成 $s-\frac{1}{2}$ 后，就得到

$$\frac{\pi}{\cos \pi s}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{st}}{e^{t/2}+e^{-t/2}}dt,\quad -\frac{1}{2}<\Re s<\frac{1}{2}. \tag{47.9}$$

那么令 $E(s)=\frac{\pi}{\cos \pi s}$，根据定理 43.1，就有

$$\pi^{-1}[\cos \pi D][e^{x/2}f(e^x)]=e^{t/2}\varphi(e^t). \tag{47.10}$$

由(41.9)很明显地 $E(s)\in E$（因为满足定理 43.1 中的条件）。此外，能够証明，

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2D}{2k-1}\right)[e^{x/2}f(e^x)]=(-1)^n\frac{4^n n!}{(2n)!}e^{(2n+1)x/2}f^{(n)}(e^x),$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2D}{2k-1}\right)[e^{-(2n-1)x/2}f(e^x)]=\frac{4^n n!}{(2n)!}e^{x/2}f^{(n)}(e^x).$$

利用这些事实就可由(47.7)导出下面的定理：

定理 47.2 設 $\varphi(t)\sqrt{t}$ 是有界連續函数，并且 $\varphi(t)$ 的 Stieltjes 变换

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{\varphi(t)}{x+t}dt,\quad x>0$$

存在，則有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}[x^{2n}f^{(n)}(x)]^{(n)}=\varphi(x). \tag{47.11}$$

§48 Meijer 变换

設

$$K_0(x)=-\gamma-\log\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}-\gamma\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},\quad 0<x<\infty. \tag{48.1}$$

γ 是 Euler 常数。$K_0(x)$ 可以表达成为下面的积分形式[1]：

[1] 見 W. Magnus-F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik (Berlin, 1948).

$$K_0(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x(\cosh t)}dt. \tag{48.2}$$

令

$$f(x)=\int_{-0}^{\infty}\sqrt{xt}\,K_0(xt)\varphi(t)dt. \tag{48.3}$$

$f(x)$ 就叫做 $\varphi(t)$ 的 Meijer 变换。当 $x\to\infty$ 时，

$$K_0(x)=O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}\right).$$

由(48.3)就有

$$e^{x/2}f(e^x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{x-t}K_0(e^{x-t})e^{-t/2}\varphi(e^{-t})dt,$$

右边是 $e^tK_0(t)$ 与 $e^{-t/2}\varphi(e^{-t})$ 的結合函数。又因为

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)=2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}e^te^{-e^{2t}}dt=2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}g(t)dt,$$

所以

$$\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)=4\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}dt\int_{-\infty}^{\infty}g(t-u)g(u)du,$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t-u)g(u)du=e^t\int_{-\infty}^{\infty}e^{-e^{2t-2u}}e^{-e^{2u}}du$$

$$=e^t\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-2e^t\cosh(t-2u)\}du$$

$$=\frac{1}{2}e^t\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-2e^t\cosh v\}dv=e^tK_0(2e^t).$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}e^tK_0(e^t)dt=2^{-s-1}\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right). \tag{48.4}$$

但是根据大家熟知的事实，对于 $\Gamma(s)$ 有公式

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{s/2}}{\sqrt{\pi}}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{s}{2k-1}\right).$$

因此根据定理 43.1 有

$$\frac{2^{D+1}}{\Gamma^2\left(\frac{1-D}{2}\right)} e^{x/2} f(e^x) = e^{-x/2}\varphi(e^{-x}),$$

而这个公式可以用上面的結果写成

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} (2n)^D \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{D}{2k-1}\right)^2 (e^{x/2}f(e^x))$$
$$= e^{-x/2}\varphi(e^{-x}). \tag{48.5}$$

另一方面，一般地成立着公式：

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{D}{2k-1}\right)[e^x g(e^{2x})] = (-1)^n \frac{4^n n!}{(2n)!} e^{(2n+1)x} g^{(n)}(e^x).$$

利用这个公式，幷設 $e^{x/2}f(e^x) = e^x R(e^{2x})$ [卽把 $e^{x/2}$ 改写成$(e^{2x})^{1/2}$]，則有

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{D}{2k-1}\right)[e^{x/2} f(e^x)] = (-1)^n \frac{4^n n!}{(2n)!} e^{(2n+1)x} R^n(e^{2x}),$$

再設 $e^{(2n+1)x}R^{(n)}(e^{2x})$ 等于 $e^x H(e^{2x})$，則有

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{D}{2k-1}\right)^2 [e^{x/2} f(e^x)] = \frac{4^{2n}(n!)^2}{(2n!)^2} e^{(2n+1)x} H^{(n)}(e^{2x}).$$

利用这些公式，[只要令 $(2n)^D = e^{D\log 2n}$]，就能得到下面的結果：

定理 48.1 設 $\varphi(t)\sqrt{t}$ 是有界連續的函数，幷設

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{xt}\, K_0(xt)\varphi(t)\,dt,$$

則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi\sqrt{x}}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}\left[z^{n+(1/2)}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^n\frac{d^n}{dz^n}F(\sqrt{z})z^{-1/4}\right)\right]_{z=(2n/x)^2}$$
$$= \varphi(x).$$

校 后 記

林堅冰 等

一

这本书前七章主要介紹 L_1 和 L_2 两类函数的 Fourier 变换和 Laplace 变换以及它們的 Stieltjes 积分形式的基本收斂定理、反演公式和一些基本性质，諸如跟微分运算的关系，跟 Hankel 变换和 Mellin 变换等最常見的积分变换的关系，关于結合式的 Parseval-Plancherel 定理等等。这些内容大体上构成关于这些变换的理論的最基本部分，也包括推导实用上的演算公式所必需的理論基础。叙述清晰，体裁也紧凑，对具备普通实函数論和复函数論知識的讀者，这是一本适宜的讀物。

最后一章扼要地介紹了 D. V. Widder 等人近年来发展的結合式变换的理論，直接取材于 I. I. Hirschman 和 Widder 的著作[4]❶，这就使得 Widder 的先后两部著作[3], [4]对全书的影响特别明显。Widder 他們用結合式变换的概念总結了通常在微分方程的解法中使用的运算微积分方法，从而充分利用結合式的特点，在无限級微分运算的理論上得到了新的成果。这一部分材料对讀者大概也不会沒有兴趣。

不过，这些内容看来是不够满足多数讀者的要求的。許多人所以对这些变换发生兴趣是由于这些变换在广泛的应用領域中能成为基本的分析工具。对于这些讀者，問題通常在两方面：第一，

❶ 方括号里的数字指后面参考书目录中的顺序号，下同。

怎样的数学問題适宜于应用这些变换求解？其次是应用这些变换的时候怎样进行演算？还有这些演算公式是怎样証明的？遺憾的是，在現有的关于这些变换的著作中，得到充分說明的时常只是后一問題，对前一問題沒有应有的理論启发。本书也不能避免这个缺点。当然，作者对这一方面并不是完全不关心的，譬如在最后一章引用 Widder 对运算微积分的說明就是一个例子。关于这方面还应該特别提起[1]和[11]的作者所作的深入的分析，可是傳統的表达方式妨碍了他們采取更直接的途徑。此外，在抽象調和分析的領域中虽然有一些有关的理論概括，可是那些抽象的語言对初学者显然是过分生涩的。因此，下面除了向讀者推荐一些为了进一步研究所需要的参考书以外，特别就这問題做一些概括性的討論，希望对初学者能有所帮助。

二

Fourier 变换和 Laplace 变换是函数的两种特殊的綫性变换，要理解它們的本质最好是从函数的綫性变换的一般表示法考虑起。在这里，向量空間的綫性变换是我們良好的借鉴。

n 度复欧氏空間的綫性变换可以表示为方程組

$$\tilde{v}^i=\sum_{j=1}^{n} a_j^i v^j \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{1}$$

v^i 和 $\tilde{v}^i$ 表示任何一个向量变换前后的分量，a_j^i 可以理解为原来第 j 个基底向量的象的第 i 个分量。在标准正交基底上，向量的分量不外是向量跟基底的数量积。

一个函数是由它在各点的函数值定义的。把这些函数值看做它的分量，那末一个函数跟另一个函数的共軛值的乘积的积分可以看作向量的內积的自然推广。所以，如果"函数空間"的基底記做 $\delta_a(x)$，那末一个函数 $u(x)$ 在 $x=a$ 的"分量"应該是

$$u(a)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\overline{\delta_a(x)}\,dx, \tag{2}$$

这里我們假設 $u(x)$ 是定义在 $(-\infty,\ \infty)$ 上的某一类复函数。在这比拟下，仿照(1)，我們得到綫性变换的一般表示式

$$\tilde{u}(a)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\tilde{\delta}_x(a)\,dx. \tag{3}$$

显然，由于我們的要求，$\delta_a(x)$ 正是通常所謂 Dirac 函数。由(3)看到，为了表达一个綫性变换，全部任务就是寻求 $\delta_a(x)$ 的象。

(3)的反演也可以仿照(1)的反演来实現。値得特别提起的是当(1)是酉(复正交)变换的时候，(1)的反演是

$$v^i=\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_i^j\tilde{v}^j\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{4}$$

它跟(1)的联系是特别明显的。对函数变换来說，复正交条件应該是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\delta}_a(x)\bar{\tilde{\delta}}_b(x)\,dx=\delta_a(b). \tag{5}$$

因此仿照(4)，当(5)成立的时候，(3)的反演公式

$$u(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(a)\overline{\tilde{\delta}_x(a)}\,da. \tag{6}$$

上面这些明显的关系式是我們討論 Fourier 变换和 Laplace 变换的意义的基础。

三

在什么情况下需要运用 Laplace 变换呢？我們先拿运算微积分作为例子来說明。运算微积分的基本思想是把微分运算当做乘法看，然后把代数的方法应用到由 $\frac{d}{dx}$ 組成的多項式上，最后把某些綫性微分方程的解法“代数化”。但是使 $\frac{d}{dx}u=\lambda u$ 成立的 u 只有 $ce^{\lambda x}$。因此我們希望借助于某种变换 $u\to\tilde{u}$ 使这个“乘法化”

的过程能够变相地完成，即要求 u 与 u' 經变換后滿足方程

$$\tilde{u}' = \lambda \tilde{u}. \tag{6}$$

在代数运算的自然要求下，λ 和 $\tilde{u}$ 都应該是复数。又为了能够限制在比較簡单的单变数的情形，我們自然希望 λ 和 $\tilde{u}$ 的数值能决定于同一个参数，因此 $\tilde{u}$ 是 λ 的函数。此外，由于处理的是綫性微分方程，当然也要求 $u \to \tilde{u}$ 的变換是綫性的。这种变換应該怎样表示，或者說(3)里的 $\tilde{\delta}_x$ 应該是什么呢？

特別对于 δ_x，(6) 这个条件成为 $\lambda \tilde{\delta}_x(\lambda) = \tilde{\delta}'_x(\lambda)$ ($\tilde{\delta}'_x$ 表示 $\dfrac{\partial \delta_x(y)}{\partial y}$ 經变換后的象)，因此根据(3)經过分部积分就得到

$$\lambda \tilde{\delta}_x(\lambda) = \tilde{\delta}'_x(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'_x(a) \tilde{\delta}_a(\lambda)\, da$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta_x(a) \frac{\partial \tilde{\delta}_a(\lambda)}{\partial a}\, da = -\frac{\partial \tilde{\delta}_x(\lambda)}{\partial x}.$$

比較这方程的最左和最右端的式子得到

$$\tilde{\delta}_x(\lambda) = c(\lambda) e^{-x\lambda},$$

于是所需要的变換必須是

$$\tilde{u}(\lambda) = c(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-\lambda x} dx, \tag{7}$$

而且为了(6)成立，还得限制 $u(-\infty) = 0$, $u(\infty) = 0$. 当然这样的边界条件甚至在要求有关的积分存在的时候就已經需要了。

为了簡单，不妨取 $c(\lambda) = 1$，于是 (7) 正是双边的 Laplace 变換。在不同的边界条件 $u(x) = 0$ $(x \overline{\in} (a, b))$ 下，这变做区間 (a, b) 上的 Laplace 变換

$$\tilde{u}(\lambda) = \int_a^b u(x) e^{-\lambda x} dx. \tag{8}$$

当 $a = 0$, $b = \infty$ 的时候，(8) 就是通常的 Laplace 变換。

从上面可以看出，正是运算微积分的基本原理决定了 Laplace 变換的形式。

再考察一下反演的問題。为了反演的方便我們自然寻求酉变换。由(4)知道(7)成为酉变换的条件是

$$c(a)\overline{c(b)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax}\overline{e^{-bx}}dx=\delta_a(b).$$

显然，如果 a 和 b 不都是純虛数，这方程不能成立。但当 a 和 b 都是純虛数，而且 $c(a)=c(b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 时，則可以利用 $\delta_a(x)$ 的定义(2)来証明这个事实，詳細演算这里不再进行。这样，所求的酉变换成为

$$\tilde{u}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x)e^{-i\lambda x}dx,\qquad \lambda\gtreqless 0, \tag{9}$$

这就是 Fourier 变换。酉变换在反演問題上的特殊意义造成了 Fourier 变换在 Laplace 变换的理論中的特殊地位。

四

把綫性运算"乘法化"其实并不限于前面所說的微分运算。譬如，应用关于某一个变数的 Laplace 变换把偏微分运算化为常微分运算显然是根据同一原理的。在解偏微分方程的时候我們也常用分离变数法，对于某些边界問題它可以用 Fourier 級数的展开来实現，这包含着同样的思想。事实上，近代的 Haar 积分的概念已經直接把这里所用的积分和級数的概念在严格的邏輯基础上統一起来了(可以参考[17])。

利用分离变数法在圓柱坐标下解 Laplace 方程引起 Bessel 方程的求解問題。这里也需要把一个綫性微分运算"乘法化"。用类似于前一段的办法，我們可以說明 Hankel 变换正是实現这个目的的天然工具。类似的原理也可以說明 Mellin 变换和 Legendré 变换等等在数学物理中产生的根源。

解波动方程中的特征函数法也是一个可以应用类似方式加以

考察的例子。在这里出現的方程 $\Delta u=\lambda u$ 的求解問題事实上就是 Laplace 运算"乘法化"的問題。所以多变数的 Fourier 变换在这种情况下出現就很自然了。

在数学物理中,綫性变换的运用还有另外的方式,比方可以把 Poisson 方程 $\Delta u=f$ 直接理解做 $u\to f$ 的一个綫性变换。解这方程事实上就是求这变换的反演。利用多变数的 Dirac 函数的概念,这反演自然可以表示成

$$u(P)=\iiint_{\infty} f(Q)\,\Delta^{-1}\delta_Q(P)\,dV,$$

而 $\Delta^{-1}\delta_Q(P)$ 就是通常的 Green 函数。这样我們得到"基本解"方法。

上面的这些例子說明了积分变换的实质。Laplace 变换的特殊意义在于它所对应的运算是最基本的微分运算。

五

除了数学物理的問題以外,另一类牽涉到 Laplace 变换和 Fourier 变换的数学問題是跟結合式的运算有关的。这类問題的主要来源是概率論和有关的技术科学,因为两个随机变数的和的概率分布是它們的概率分布的結合式。为了解决这类問題,通常又是把結合式的运算"乘法化",因此也要应用綫性变换。

不用 Stieltjes 积分表示,結合式可以写做

$$c(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy. \tag{10}$$

我們希望通过綫性变换 $\varphi\to\tilde{\varphi}$ 使

$$\tilde{c}(P)=\tilde{f}(P)\,\tilde{g}(P). \tag{11}$$

我們来推求在满足上述要求的变换下的 $\tilde{\delta}_x$。利用(11)可以推出关系式:

$$(12)\qquad \tilde{\delta}_{x+y}(P)=\tilde{\delta}_x(P)\tilde{\delta}_y(P).$$

这就决定了 $\tilde{\delta}_x(P)=e^{c(P)x}$. 适当选择变数，可以写成

$$\tilde{\delta}_x(P)=e^{-Px}.$$

这样又得到 Laplace 变换，为了反演方便起見，我們自然时常应用 Fourier 变换(9)。这就是特征函数变成概率論中常用的概念的根源。

六

对 Laplace 变换和 Fourier 变换本质的解释大体如上。至于关于这些变换的更进一步的知識可以从下面开列的著作中找到。比方叙述一般 Tauber 定理和应用的有[3]，[6]，叙述一般調和分析和几乎周期函数的有[1]，[6]，其余可参考下面所作的簡短說明。目录中还包括了一些属于其他領域的书本，因为調和分析也正象其他許多分支一样，是一門不能仅仅在它自己的領域内来认識它的全部意义的学科。

参考书[1]～[4]是四本适宜的讀物：[1]的特点上面提过，[2]写得非常簡洁，并且特别注意到跟多变数理論的联系。[3]，[4]是本书許多材料的来源。有些比較高深的討論，例如一般 Tauber 定理和应用，矩問題等等，是本书所未收罗的。此外，还有某些古典的結果見于出版較早的著作[5]～[8]。其中[6]的內容大体上見于前面四书，[5]，[7]，[8]特别詳細叙述在复变数分析上的应用。[5]搜集了許多历史性的成果，而[7]，[8]則主要是介紹作者們的工作。除了这些讀物以外，手册[9]全面地总結了 Laplace 变换理論方面的成果，并附有詳細的文献目录，値得参考。同一作者的著作[10]是它的补充讀物。

关于应用方面，国内出版的譯本値得推荐的有[11]～[13]。[11]是一本論述深刻、內容丰富的好书，[12]，[13]則以簡洁見长。

介紹原始形态的 Heaviside 方法的有[14]，至于特别論述 Fourier 变換在概率論和有关的技术科学方面应用的专著則有[15]，[16]。

关于抽象調和分析的有 [17]。[17] 綜合地介紹了 Гельфанд 理論出現以后的有关成果，內容簡洁。[18] 和 [19] 是新近出版的調和分析方面的文献汇編，在一定程度上反映了这方面的理論的現代成就。最后不能不提起广义函数論和調和分析的密切关系，这从上面所說的 Dirac 函数在綫性变換理論中的重大作用可以看出来。[20]～[22] 是广义函数論方面的专著，[22] 特别詳細地討論了調和分析。

参考书

一、基本理論方面

[1] E. C. Titchmarsh: An introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford, 1948.

[2] S. Bochner and K. Chandrasekharan: 傅立叶变式，何旭初譯，叶彥謙校，高等教育出版社，1952.

[3] D. V. Widder: The Laplace transform, Princeton, 1946.

[4] I. I. Hirschman and D. V. Widder: The convolution transform, Princeton, 1955.

[5] S. Bochner: Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.

[6] N. Wiener: The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933.

[7] R. E. A. C. Paley and N. Wiener: Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934.

[8] T. Carleman: Integrale de Fourier, Uppsala, 1944.

[9] G. Doetsch: Handbuch der Laplace-Transformation, I (1950), II (1955), III (1956), Basel.

[10] G. Doetsch: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Basel, 1958.

二、应用方面

[11] I. N. Sneddon: 富利叶变换,何衍璿、張 燮譯,科学出版社,1958.

[12] C. J. Tranter: 数学物理中的积分变换,潘德惠譯,高等教育出版社,1959.

[13] M. И. Конторович: 运算微积分学和电路中的不稳定現象,胡汝鼎、謝克寬譯,上海科学技术出版社,1956.

[14] E. J. Berg: Heaviside's operational calculus, New York, 1929.

[15] N. Wiener: Extrapolation, interpolation and smoothing of time series, Cambridge Mass., 1950.

[16] S. Bochner: Harmonic analysis and the theory of probability, 1955.

三、調和分析的現代理論方面

[17] L. H. Loomis: An introduction to abstract harmonic analysis, New York, 1953.

[18] Analyse Harmonique, Coll. Internationaux du CNRS., Paris, 1949.

[19] A. Zygmund etc: Contributions to Fourier analysis, Ann. Math. Studies 25, Princeton, 1950.

[20] 馮康: 广义函数論,科学进展, 1(1955),405~590.特别其中的第七章。

[21] L. Schwartz: Théorie des distributions, II, 1951. 特别其中的第七章。

[22] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов: Обобщённые функции и действия над ними, I(1958), II, III(1959), Москва.